풀이

STEP II 1987, 문제 2

순수수학 • 삼각함수 항등식

> **STEP II 1987, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q2

핵심 아이디어

주어진 식에는 $\sin^2 A, \sin^2 B, \sin^2 C$만 나타나고, 이 식은 $\sin^2 C$에 대한 **이차식**(quadratic)이다. $A \pm B \pm C$에 대한 조건은 C가 $A+B$ 또는 $A-B$와 묶여 있다는 뜻이다. 따라서 그 이차식의 두 근(root)이 $\sin^2(A+B)$와 $\sin^2(A-B)$라고 추측하는 것이 자연스럽다. 두 근의 합과 곱을 확인하면 이 추측이 맞음을 알 수 있고, 결과는 저절로 따라 나온다.

풀이

$x = \sin^2 A$, $y = \sin^2 B$, $z = \sin^2 C$라 하고, 좌변을 E라 하자. 그러면

$$E = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy + 4xyz.$$

z의 거듭제곱끼리 모으면

$$\begin{aligned} E &= z^2 - 2z(x + y - 2xy) + (x^2 - 2xy + y^2) \\ &= z^2 - 2(x + y - 2xy)\, z + (x - y)^2. \end{aligned}$$

이차식의 근

다음이 성립함을 보이자.

$$E = (z - \sin^2(A+B))(z - \sin^2(A-B)).$$

양변이 모두 z에 대한 최고차항의 계수가 1인 이차식(monic quadratic)이므로, $\sin^2(A+B)$와 $\sin^2(A-B)$의 합과 곱이 맞는지만 확인하면 충분하다.

합. $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$를 전개하여 제곱하면, 두 식을 더할 때 교차항

이 소거된다.

$$\begin{aligned}\sin^2(A+B)+\sin^2(A-B) &= 2\sin^2 A\cos^2 B + 2\cos^2 A\sin^2 B \\ &= 2x(1-y)+2(1-x)y \\ &= 2(x+y-2xy).\end{aligned}$$

곱. 제곱의 차(difference of two squares)를 이용하면

$$\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A\cos^2 B - \cos^2 A\sin^2 B = x(1-y)-(1-x)y = x-y,$$

이므로 $\sin^2(A+B)\sin^2(A-B) = (x-y)^2$이다.

둘 다 E의 계수와 일치하므로 주장이 증명된다.

> **생각해 보기** 왜 $\sin^2 C$가 $\sin^2(A+B)$ 또는 $\sin^2(A-B)$와 같다는 것만 알면 충분한가?

그러면 z가 두 근 중 하나이므로 E의 인수 하나가 0이 되기 때문이다. 이제 각에 대한 조건으로부터 바로 이것이 얻어짐을 보이면 된다.

조건 이용하기

어떤 정수 k와 어떤 부호 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{1, -1\}$에 대하여 $A + \varepsilon_1 B + \varepsilon_2 C = k\pi$라 하자. 그러면

$$C = \varepsilon_2(k\pi - (A + \varepsilon_1 B)).$$

함수 $\sin^2$은 짝함수(even function)이고 주기(period)가 π이므로, 부호 ε_2도 $k\pi$도 그 값을 바꾸지 않는다.

$$\sin^2 C = \sin^2(A + \varepsilon_1 B).$$

따라서 $z = \sin^2(A+B)$($\varepsilon_1 = 1$일 때)이거나 $z = \sin^2(A-B)$($\varepsilon_1 = -1$일 때)이다. 어느 경우든 E의 인수 하나가 0이므로

$$E = 0,$$

이고, 이것이 보이려던 것이다. ■

더 깔끔한 꼴 (그리고 역)

각 인수는 사인의 제곱의 차이고, $\sin^2 P - \sin^2 Q = \sin(P+Q)\sin(P-Q)$이다(위의 곱 공식에서 $A = P$, $B = Q$로 둔 것). 따라서

$$E = \sin(A+B+C)\,\sin(C-A-B)\,\sin(C+A-B)\,\sin(C-A+B).$$

여기 나타난 네 각은 부호를 무시하면 정확히 $A+B+C$, $A+B-C$, $A-B+C$, $A-B-C$이다. 이로써 결과가 명료해진다. 즉 $E = 0$일 **필요충분조건**은 네 각 $A \pm B \pm C$ 중 하나가 π의 배수인 것이다. 이것은 원래 명제의 역(converse)도 함께 보여 준다.

검산

- $A = \frac{\pi}{6}, B = \frac{\pi}{3}, C = \frac{\pi}{2}$로 두면 $A + B - C = 0$이다. 이때 $x = \frac{1}{4}, y = \frac{3}{4}, z = 1$이고 $E = \frac{1}{16} + \frac{9}{16} + 1 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{8} + \frac{3}{4} = 0$이다.
- $A = 0.3, B = 0.7, C = 1.1$(특별한 관계 없음)로 두면 E와 네 사인의 곱이 모두 0.05538이 되므로, 조건을 벗어나면 식이 실제로 0이 아니다.
- 10^5개의 무작위 순서쌍에 대한 검사로 인수분해(factorisation)가 맞음을 확인했으며, $A \pm B \pm C$ 중 하나가 π의 배수가 되도록 강제하면 언제나 10^{-14} 이내의 오차로 $E = 0$임도 확인했다.

흔한 실수

- $A + B + C = \pi$인 경우(삼각형)만 다루는 것. 문제는 네 가지 부호 패턴 중 어느 것이든, 그리고 π의 어떤 배수든 허용한다. $\sin^2$이 짝함수이고 주기가 π라는 사실이 이 모든 경우를 한꺼번에 처리해 준다.
- 근의 공식으로 이차방정식을 풀다가 $\sqrt{xy(1-x)(1-y)}$에서 헤매는 것. 추측한 근의 합과 곱을 확인하면 제곱근과 부호 문제를 완전히 피할 수 있다.

STEP 너머

식 $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy$는 수학 곳곳에 나타난다. x, y, z를 a^2, b^2, c^2로 바꾸면 이 식은 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형의 넓이의 제곱의 -16배가 되며(헤론의 공식(Heron's formula)), 세 길이로 삼각형을 만들 수 있는지를 결정하는 판별식(discriminant)과 비슷한 양이기도 하다. 대칭다항식(symmetric polynomial)을 한 변수에 대한 이차식으로 보고 그 근을 추측하는 것은 대수학과 불변량 이론(invariant theory) 전반에 걸쳐 거듭 등장하는 기법이다. 이런 정신의 문제를 더 보고 싶다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.