풀이

STEP II 1987, 문제 16

확률과 통계 • 베이즈 정리

STEP II 1987, 16번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/87-s2-q16

핵심 아이디어

이 문제는 가장 단순한 형태의 베이즈(Bayes) 정리(Bayes' theorem)이다. 두 사람이 모두 "예"라고 보고하는 상황은 두 가지 경로로 생길 수 있다. 주장이 참이고 두 친구가 모두 진실을 말하는 경우, 또는 주장이 거짓이고 두 친구가 모두 거짓말을 하는 경우이다. 각 경로에 그 사전 확률(prior probability)과 그 한 쌍의 보고가 나올 확률을 곱해 가중치를 매긴 다음, 전체 가운데 "참" 경로에서 나온 몫이 얼마인지 묻는다. 두 번째 부분도 같은 방식으로 풀린다. 새로운 점은 친구들의 대답이 오직 A에 대해서만 무언가를 말해 준다는 것뿐이므로, 세 가지 가능성을 A가 냉장고 안에 있는지에 따라 분류해야 한다.

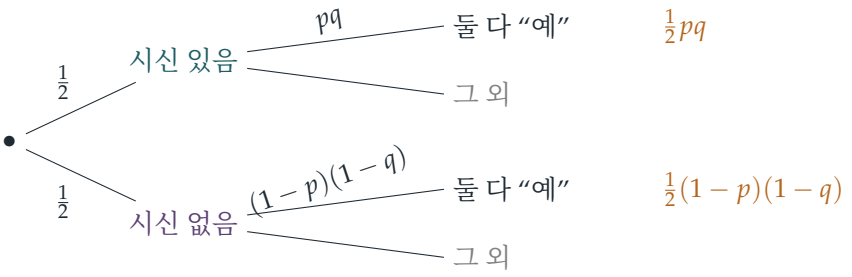
풀이

첫 번째 추정

냉장고 안에 시신이 있는 사건을 F라 하고, P와 Q가 모두 시신이 있다고 말하는 사건을 Y라 하자. 오늘 아침 시점에서 $\Pr(F) = \Pr(F') = \frac{1}{2}$이다.

각 친구가 예/아니오 질문에 답한다고 모형화한다. 진실을 말한다는 것은 올바른 답을 한다는 뜻이고, 거짓말을 한다는 것은 틀린 답을 한다는 뜻이다. 친구들이 정직한지는 냉장고 안에 무엇이 있는지와 무관하며, P와 Q는 서로 독립적으로 행동한다. 따라서 다음이 성립한다.

- 시신이 있으면 두 사람이 모두 진실을 말할 때, 그리고 그때에만 둘 다 "예"라고 하므로 $\Pr(Y \mid F) = pq$이다.
- 시신이 없으면 두 사람이 모두 거짓말을 할 때, 그리고 그때에만 둘 다 "예"라고 하므로 $\Pr(Y \mid F') = (1-p)(1-q)$이다.



조건부 확률(conditional probability)의 정의(베이즈 정리)에 의해

$$\begin{aligned}\Pr(F \mid Y) &= \frac{\Pr(F)\Pr(Y \mid F)}{\Pr(F)\Pr(Y \mid F) + \Pr(F')\Pr(Y \mid F')} = \frac{\frac{1}{2}pq}{\frac{1}{2}pq + \frac{1}{2}(1-p)(1-q)} \\ &= \frac{pq}{pq + 1 - p - q + pq} = \frac{pq}{1 - p - q + 2pq},\end{aligned}$$

이고, 이것이 구하는 추정값이다. 사전 확률이 반반이었기 때문에 $\frac{1}{2}$이라는 인수는 약분되어 사라진다.

? **생각해 보기** 왜 답이 단순히 두 사람이 모두 진실을 말할 확률인 pq가 아닐까?

우리가 이미 알고 있는 정보, 즉 두 사람의 말이 일치했다는 사실이 있기 때문이다. 둘 중 정확히 한 사람만 거짓말을 하는 경우는 이제 불가능하다. 그런 경우에는 한 사람은 "예", 다른 사람은 "아니오"라고 답했을 것이기 때문이다. 따라서 남은 경우들만으로 확률을 다시 맞춰야 한다. 살아남은 두 경로 가운데 "둘 다 진실"의 가중치는 pq이고 "둘 다 거짓"의 가중치는 $(1-p)(1-q)$이다. 이 둘의 합으로 나누는 것이 바로 그 재조정이다. (사전 확률 $\frac{1}{2}$도 한몫을 한다. 사전 확률이 고르지 않았다면 약분되지 않았을 것이다.)

두 번째 추정

이제 시신은 분명히 있다. 각각 사전 확률이 $\frac{1}{3}$로 똑같이 가능한 세 가지 경우는 다음과 같다.

$$A\text{만}, \qquad B\text{만}, \qquad A\text{와 } B \text{ 모두}.$$

두 친구가 모두 A가 냉장고 안에 있다고 말하는 사건을 Y_A라 하자. 앞과 같은 모형에 의해 이들의 대답은 오직 A가 있는지에만 의존한다.

- "A만"인 경우와 "둘 다"인 경우에는 A가 냉장고 안에 있으므로, 각각에서 $\Pr(Y_A) = pq$이다.
- "B만"인 경우에는 A가 없으므로 $\Pr(Y_A) = (1-p)(1-q)$이다.

따라서

$$\begin{aligned}\Pr(\text{둘 다} \mid Y_A) &= \frac{\frac{1}{3}pq}{\frac{1}{3}pq + \frac{1}{3}(1-p)(1-q) + \frac{1}{3}pq} \\ &= \frac{pq}{2pq + 1 - p - q + pq} = \frac{pq}{1 - p - q + 3pq}.\end{aligned}$$

두 사람의 보고는 B에 대해서는 직접적으로 아무것도 알려 주지 않는다는 점에 주목하자. 보고의 유일한 효과는 A가 있을 확률을 바꾸는 것이다. 첫 번째 부분의 결과(사전 확률 $\frac{1}{2}$ 대신 $\frac{2}{3}$을 사용)에 의해 그 확률은 $2pq/(1-p-q+3pq)$가 된다. A가 있다는 조건에서 "A만"과 "둘 다"는 여전히 똑같이 가능하므로, 이 값을 절반으로 나눈다. 그러면 같은 답이 나온다.

검산

- $p = q = \frac{1}{2}$이면 친구들의 말은 쓸모가 없고, 답은 사전 확률로 돌아간다: $\frac{1}{4}/\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$이고 $\frac{1}{4}/\frac{3}{4} = \frac{1}{3}$이다.
- $p = q = 1$이면 친구들은 절대 틀리지 않으며, 답은 1(시신이 있다)과 $\frac{1}{2}$(A가 있으므로, B도 있는지는 반반이다)이 된다.
- $p = q = \frac{3}{4}$이면 답은 $\frac{9}{10}$과 $\frac{9}{19}$이다. 상태와 진실 여부의 모든 조합을 정확히 나열하여 계산한 결과는 무작위로 고른 200개의 쌍 (p, q)에 대해 모두 일치한다. $p = 0.7$, $q = 0.6$으로 4×10^5회 시행한 시뮬레이션은 두 번째 부분에 대해 0.4375를 주었고, 이는 $\frac{0.42}{0.96} = 0.4375$와 일치한다.

흔한 실수

- "둘 다 거짓말"인 경우에도 두 개의 "예"가 나온다는 것을 잊고 pq라고 답하는 것.
- 두 번째 부분에서 분자에는 "둘 다"인 경우만 넣으면서 분모에서 "A만"인 경우를 빠뜨리는 것. 두 경우 모두 A가 있다는 사실과 모순되지 않는다.

STEP 너머

이것은 베이즈 갱신(Bayesian updating)이다. 사전 믿음에 증거의 **가능도**(likelihood)를 곱한 다음 정규화한다. 이를 깔끔하게 쓰는 방법은 승산(odds) 형태로 쓰는 것이다. 사후 승산은 사전 승산에 가능도비(likelihood ratio) $\frac{pq}{(1-p)(1-q)}$를 곱한 것과 같다. 이렇게 쓰면 독립적인 증인들은 그저 각자의 비를 곱할 뿐이라는 것이 분명해진다. 같은 계산이 의료 검사, 스팸 필터, 법정에서 증거를 종합하는 일의 바탕에 깔려 있다. Blitzstein과 Hwang의

Introduction to Probability(확률론 입문)에는 조건부 확률에 관한 훌륭한 장이 있으며, 바로 이런 성격의 퍼즐이 많이 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.