풀이

STEP II 1987, 문제 15

확률과 통계 • 기하학적 확률

> **STEP II 1987, 15번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q15

핵심 아이디어

위치는 잊고 **시각**을 생각하자. 각 차량은 어떤 시간 구간 동안 교차 지점을 차지하며, 충돌은 두 구간이 겹칠 때 정확히 일어난다. 이 겹침을 두 부등식(inequality)으로 쓰면, (u_1, u_2)-평면에서 충돌 영역은 원점을 지나는 두 직선 사이의 쐐기 영역(wedge)이 된다. u_1, u_2가 $(0, V)$에서 균등분포(uniform distribution)를 따르면 점 (u_1, u_2)는 정사각형 위에서 균등분포를 따르므로, 확률은 단순히 정사각형 가운데 쐐기 영역 안에 놓인 부분의 비율이며, 세 가지 경우는 두 직선이 정사각형을 빠져나가는 위치에 대응한다.

풀이

충돌 조건

기차와 트럭이 한 점에서 만나는 직선 도로를 따라 일정한 속력 $u_1, u_2 > 0$으로 움직인다고 모형화한다(교차 지점의 폭은 무시하거나 길이에 포함시킨다). 충돌은 같은 순간에 각 차량의 어떤 부분이 교차 지점에 있을 때, 그리고 그때에만 일어난다.

기차의 앞부분은 시각 d_1/u_1에 교차 지점에 도달하고 뒷부분은 시각 $(d_1 + l_1)/u_1$에 지나가므로, 기차가 교차 지점을 차지하는 시간은

$$\frac{d_1}{u_1} < t < \frac{d_1 + l_1}{u_1}.$$

이다. 마찬가지로 트럭은 $d_2/u_2 < t < (d_2 + l_2)/u_2$ 동안 교차 지점을 차지한다. 두 열린 구간(open interval) (a_1, b_1)과 (a_2, b_2)는 각 구간이 다른 구간이 끝나기 전에 시작할 때, 즉 $a_1 < b_2$이고 $a_2 < b_1$일 때 정확히 겹친다. 따라서 충돌은

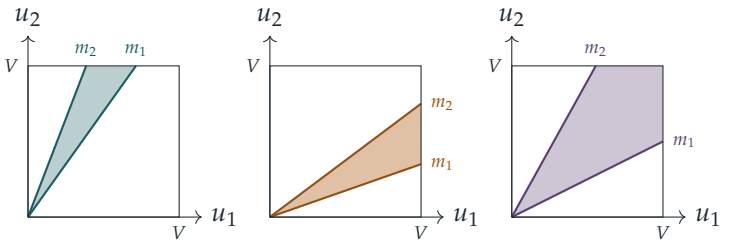
$$\frac{d_1}{u_1} < \frac{d_2 + l_2}{u_2} \quad \text{그리고} \quad \frac{d_2}{u_2} < \frac{d_1 + l_1}{u_1}.$$

일 때, 그리고 그때에만 일어난다. 양수 u_1u_2를 양변에 곱하고 정리하면 이는

$$\boxed{\frac{d_2}{d_1+l_1}\,u_1 \;<\; u_2 \;<\; \frac{d_2+l_2}{d_1}\,u_1.}$$

이다. (부등식 가운데 하나가 등식이면 두 차량은 앞부분과 뒷부분이 닿기만 한다. 이 경우의 확률은 0이므로 이를 충돌로 셀지 말지는 상관없다.)

$m_1 = \dfrac{d_2}{d_1+l_1}$, $m_2 = \dfrac{d_2+l_2}{d_1}$라 하자. $d_2 < d_2+l_2$이고 $d_1+l_1 > d_1$이므로 $m_1 < m_2$이고, 따라서 충돌 영역은 제1사분면에서 직선 $y = m_1x$와 $y = m_2x$ 사이의 쐐기 영역이다. 아래 그림은 다음 단계에서 필요한 정사각형 $0 < x, y < V$ 안에 이 영역을 색칠하여 나타낸 것이다.



(A) $d_1+l_1 \le d_2$ (B) $d_2+l_2 \le d_1$ (C) 그 밖의 경우

기차의 뒷부분이 트럭의 앞부분보다 가까울 때의 확률

u_1과 u_2는 독립(independent)이고 각각 $(0, V)$에서 균등분포를 따르므로, 순서쌍 (u_1, u_2)는 정사각형 $(0, V)^2$ 위에서 상수 결합 밀도(joint density) $1/V^2$을 가진다. 따라서 충돌 확률은

$$\frac{\text{정사각형 안에 있는 쐐기 영역의 넓이}}{V^2}.$$

이다.

? **생각해 보기** 두 직선은 정사각형의 어느 변을 통해 빠져나가는가?

직선 $y = mx$는 $m \ge 1$이면 윗변을 통해($(V/m, V)$에서), $m \le 1$이면 오른쪽 변을 통해((V, mV)에서) 정사각형을 빠져나간다. 이 경우에는 $d_1+l_1 < d_2$이므로 $m_1 = d_2/(d_1+l_1) > 1$이고, 따라서 $m_2 > m_1 > 1$이기도 하다. 즉 그림 (A)처럼 두 직선 모두 윗변을 통해 빠져나간다.

그러면 정사각형 안의 쐐기 영역은 꼭짓점이 $(0,0)$, $(V/m_2, V)$, $(V/m_1, V)$인 삼각형이다. 윗변 위에 놓인 밑변의 길이는 $V/m_1 - V/m_2$이고 높이는 V이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{충돌}) &= \frac{1}{V^2}\cdot\frac{1}{2}V\left(\frac{V}{m_1}-\frac{V}{m_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{d_1+l_1}{d_2}-\frac{d_1}{d_2+l_2}\right)\\ &= \frac{(d_1+l_1)(d_2+l_2)-d_1d_2}{2d_2(d_2+l_2)} = \frac{l_1l_2+l_2d_1+l_1d_2}{2d_2(l_2+d_2)},\end{aligned}$$

이다. $d_1 d_2$ 항이 소거되기 때문이다. 이것이 구하는 결과이다.

나머지 두 경우

트럭의 뒷부분이 기차의 앞부분보다 가까운 경우, $d_2 + l_2 < d_1$. 이제 $m_2 = (d_2 + l_2)/d_1 < 1$이므로 $m_1 < m_2 < 1$이고, 그림 (B)처럼 두 직선 모두 오른쪽 변을 통해 빠져나간다. 쐐기 영역은 꼭짓점이 $(0,0)$, $(V, m_1 V)$, $(V, m_2 V)$인 삼각형으로, 변 $x = V$ 위의 밑변은 $(m_2 - m_1)V$, 높이는 V이다. 따라서

$$\mathrm{P}(\text{충돌}) = \frac{1}{2}(m_2 - m_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{d_2 + l_2}{d_1} - \frac{d_2}{d_1 + l_1}\right) = \frac{l_1 l_2 + l_1 d_2 + l_2 d_1}{2d_1(l_1 + d_1)}.$$

이는 첫 번째 답에서 기차와 트럭의 역할을 바꾼 것($l_1 \leftrightarrow l_2, d_1 \leftrightarrow d_2$)이며, 마땅히 그래야 한다. 두 차량을 맞바꾸는 것은 그림을 $y = x$에 대하여 대칭이동하는 것과 같기 때문이다.

어느 차량도 다른 차량보다 완전히 앞서 있지 않은 경우, $d_2 \le d_1 + l_1$이고 $d_1 \le d_2 + l_2$. 이제 $m_1 \le 1 \le m_2$이므로, 그림 (C)처럼 직선 $y = m_1 x$는 오른쪽 변을 통해, $y = m_2 x$는 윗변을 통해 빠져나간다. 정사각형에서 충돌하지 않는 두 삼각형을 빼는 것이 가장 쉽다. $y = m_1 x$ 아래에 있는 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} V \cdot m_1 V$이고, $y = m_2 x$의 왼쪽(이 직선과 u_2축 사이)에 있는 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} V \cdot V/m_2$이다. 따라서

$$\mathrm{P}(\text{충돌}) = 1 - \frac{m_1}{2} - \frac{1}{2m_2} = 1 - \frac{d_2}{2(d_1 + l_1)} - \frac{d_1}{2(d_2 + l_2)}.$$

경우가 만나는 곳에서 답들은 일치한다. $d_2 = d_1 + l_1$일 때($m_1 = 1$) 첫 번째와 세 번째 공식은 모두 $\frac{1}{2} - \frac{d_1}{2(d_2 + l_2)}$을 주며, $d_1 = d_2 + l_2$일 때도 마찬가지이다. 어느 확률도 V에 의존하지 않는다는 점에 주목하자. 두 속력에 같은 배수를 곱해도 두 차량이 충돌하는지 여부는 바뀌지 않는다.

검산

- $l_1 = 1, l_2 = 2, d_1 = 1, d_2 = 5$(경우 A)일 때 공식은 $\frac{9}{70} \approx 0.1286$을 준다. 무작위 속력 쌍 4×10^5개로 모의실험(simulation)을 하면 0.1283이 나왔다. 경우 B와 C의 모의실험(예를 들어 $l_1 = l_2 = 1, d_1 = 1, d_2 = 1.5$이면 0.425)도 0.002 이내에서 일치했다.
- 경우 A에서 $l_1, l_2 \to 0$으로 보내면 확률은 0이 된다. 두 점은 정확히 $u_2/u_1 = d_2/d_1$일 때에만 교차 지점에서 만난다.
- 경우 C에서 $d_1 = d_2$이고 차량이 매우 길면 $m_1 \to 0, m_2 \to \infty$이므로 확률은 1로 수렴하며, 이는 타당하다.

흔한 실수

- "트럭이 교차 지점을 다 지나가기 전에 기차가 도착한다"처럼 부등식을 하나만 쓰는 것. 두 구간이 겹치려면 두 조건이 모두 필요하다.
- 영역이 사각형인 경우 C에서 삼각형의 넓이 공식을 쓰는 것. 먼저 각 직선이 정사각형을 어디로 빠져나가는지 확인하자.

STEP 너머

여기서 쓴 방법, 즉 독립인 균등분포 확률변수에 대한 확률을 넓이로 바꾸는 방법은 기하학적 확률(geometric probability)이며, $\mathrm{P}((X,Y) \in A)$를 결합 밀도의 이중적분(double integral)으로 계산하는 가장 간단한 예이다. 같은 아이디어가 뷔퐁(Buffon)의 바늘 문제나 무작위 시각에 도착하는 두 사람의 "만남 문제" 같은 고전적인 문제의 바탕에 있다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 결합 밀도와 이를 이런 방식으로 활용하는 법을 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.