풀이

STEP II 1987, 문제 14

역학 • 원뿔 위의 고무줄

> **STEP II 1987, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q14

핵심 아이디어

고무줄은 원뿔 위에서 계속 수평인 원을 이루므로, 그 상태 전체는 하나의 수, 곧 모선(generator)을 따라 잰 꼭짓점으로부터의 거리 s로 기술된다. 그래서 작은 요소 하나를 따라간다. 장력에 의한 안쪽으로의 힘은 원뿔 면을 따르는 성분과 면에 수직인 성분으로 나뉜다. 앞의 것은 요소를 모선을 따라 움직이게 하고, 뒤의 것은 매끄러운 원뿔이 상쇄한다. s를 길이 x로 바꾸면 단진동(simple harmonic motion)이 얻어지고, 고무줄은 주기의 4분의 1이 지난 뒤 느슨해진다.

풀이

모형. 고무줄을 질량 m이 원 둘레에 고르게 분포한 가느다란 탄성 끈으로 본다. 원뿔은 매끄러우므로 각 요소에 작용하는 항력은 면에 수직이고, 중력은 무시한다. 대칭성에 의해 모든 요소가 같은 방식으로 움직이므로, 고무줄은 축 위에 중심을 둔 원으로 유지된다. 모선을 따라 잰 꼭짓점으로부터의 거리를 $s(t)$라 하자. 각 모선은 축과 각 α를 이루므로 반지름은 $s\sin\alpha$이고, 따라서

$$x = 2\pi s\sin\alpha.$$

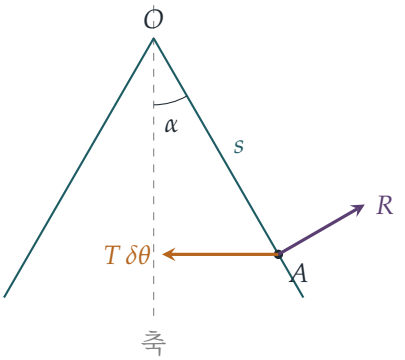
고무줄이 늘어나 있는 동안($x > l$) 훅의 법칙(Hooke's law)에 의해 장력은 $T = \dfrac{\lambda(x-l)}{l}$이다.

한 요소에 작용하는 힘. 축에서 본 중심각이 $\delta\theta$인 요소를 잡자. 이것은 고무줄의 $\delta\theta/2\pi$만큼이므로 질량은 $\dfrac{m\,\delta\theta}{2\pi}$이다. 이 요소에는 두 힘이 작용한다.

- 장력에 의해 주어진 힘 $T\,\delta\theta$: 축에 수직이고 축을 향한다.

- 원뿔의 수직 항력(normal reaction) R: 요소를 지나는 모선에 수직이다.

그림은 축과 요소를 포함하는 평면을 나타낸다.



요소는 면 위에 구속되어 있으므로 모선 OA를 따라서만 움직일 수 있다. 그 방향과 그에 수직인 방향으로 힘을 분해한다. 힘 $T\,\delta\theta$는 축에 수직이고 모선은 축과 각 α를 이루므로, $T\,\delta\theta$와 방향 $\overrightarrow{AO}$ 사이의 각은 $90^\circ - \alpha$이다. 따라서

- $\overrightarrow{AO}$ 방향(꼭짓점 쪽)으로 $T\,\delta\theta$의 성분은 $T\,\delta\theta\cos(90^\circ - \alpha) = T\,\delta\theta\sin\alpha$이고, R의 기여는 없다.
- 면에 수직인 방향으로는 운동이 없으므로 $R = T\,\delta\theta\cos\alpha$이다.

$R \geq 0$이므로 고무줄은 실제로 원뿔에 눌린 채로 있다.

> **생각해 보기** 왜 안쪽으로 향하는 힘 $T\,\delta\theta$가 그냥 반지름을 줄인다고 말할 수 없을까?

요소는 축을 향해 곧장 움직일 수 없다. 원뿔이 가로막고 있기 때문이다. $T\,\delta\theta$ 가운데 면을 따르는 부분만 가속에 기여하고, 나머지는 항력이 상쇄한다. 인수 $\sin\alpha$는 여기서 나오며, 매끄러운 경사면 위의 구슬이 경사면을 따라 $mg\sin\theta$만 받는 것과 같은 이유이다.

운동 방정식. s가 꼭짓점에서 멀어지는 방향으로 증가하도록 하고, 모선 방향으로 요소에 뉴턴(Newton)의 제2법칙을 적용하면

$$\frac{m\,\delta\theta}{2\pi}\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -T\,\delta\theta\sin\alpha \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{2\pi T\sin\alpha}{m}.$$

$\delta\theta$가 소거되므로 모든 요소가 같은 방정식을 따르고, 이로써 고무줄이 원 모양을 유지함이 확인된다. 이제 α가 상수이고 $x = 2\pi s\sin\alpha$이므로

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 2\pi\sin\alpha\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{4\pi^2 T\sin^2\alpha}{m} = -\frac{4\pi^2\lambda}{ml}(x-l)\sin^2\alpha,$$

여기서 $T = \lambda(x-l)/l$을 썼다. 이 식은 고무줄이 팽팽한 동안, 즉 $0 < t < t_0$에서 성립하며, 정리하면 구하는 방정식이 된다. □

t_0 구하기. $y = x - l$, $\omega^2 = \dfrac{4\pi^2\lambda\sin^2\alpha}{ml}$로 두면 $\ddot{y} = -\omega^2 y$이고, 이는 $y = 0$을 중심으로 하는 단진동이다. 처음 길이를 $x_0 > l$이라 하자(고무줄을 밀어 끼웠으므로 늘어난 상태에서 시작한다). 고무줄은 정지 상태에서 놓이므로 $\dot{y}(0) = 0$이고,

$$x - l = (x_0 - l)\cos\omega t.$$

고무줄은 x가 처음으로 l까지 줄어들 때, 곧 $\cos\omega t = 0$이 처음 될 때 느슨해지므로 $\omega t_0 = \frac{\pi}{2}$이다. $\omega = 2\pi\sin\alpha\sqrt{\lambda/(ml)}$이므로

$$t_0 = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{1}{4\sin\alpha}\sqrt{\frac{ml}{\lambda}}.$$

t_0이 고무줄을 얼마나 늘였는지에 의존하지 않음에 주목하자. 이는 단진동의 전형적인 성질로, 4분의 1 주기는 진폭(amplitude)에 관계없이 같다.

검산

- **단위**: λ는 힘이므로 ml/λ의 단위는 $\mathrm{kg\,m/N} = \mathrm{s}^2$이고, t_0은 시간이다.
- **극한의 경우**: $\alpha \to \frac{\pi}{2}$이면 원뿔이 평면으로 납작해지고, 고무줄은 중심을 향해 곧장 수축하며 $t_0 = \frac{1}{4}\sqrt{ml/\lambda}$이다. $\alpha \to 0$이면 원뿔이 원기둥이 되어 장력의 면 방향 성분이 없어지고, 마땅히 $t_0 \to \infty$이다.
- **수치 확인**: $\alpha = 30^\circ$, $m = 1$, $l = 1$, $\lambda = 4$이면 공식은 $t_0 = \frac{1}{4}$을 준다. 요소의 운동 방정식을 수치적으로 단계별로 풀어 보면(그리고 잘게 나눈 다각형 고무줄에 작용하는 장력의 합력을 3차원에서 직접 계산해 보아도), 임의로 고른 매개변수에 대해 인수 $\sin\alpha$와 t_0이 소수점 아래 여러 자리까지 재현된다.

흔한 실수

- 원뿔의 항력을 잊고 반지름 r에 대해 $\frac{m\,\delta\theta}{2\pi}\ddot{r} = -T\,\delta\theta$라고 쓰는 것. 이렇게 하면 인수 $\sin^2\alpha$를 통째로 놓친다.
- 요소의 질량으로 $\frac{m\,\delta\theta}{2\pi}$ 대신 m을 쓰는 것.
- t_0으로 한 주기 전체나 반 주기를 답하는 것. 고무줄은 최대로 늘어난 상태에서 시작하므로 4분의 1 주기 뒤에 자연 길이에 이른다.

STEP 너머

주어진 힘 $T\,\delta\theta$는 일반적인 사실의 작은 각 버전이다. 장력 T를 받으며 곡률 반지름(radius of curvature) ρ로 휘어진 끈은 단위 길이당 T/ρ의 힘으로 옆으로 민다. 같은 생각을 곡면으로 확장하면 비눗방울 안의 압력이 바깥 압력보다 큰 이유가 설명된다(라플라스(Laplace)의 법칙). 곡면 위에 구속된 운동은 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)으로 가장 깔끔하게 다룰 수 있는데, 여기서는 항력이 아예 나타날 필요가 없다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에는 장력을 받는 끈과 구속된 운동에 관한 문제가 많이 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.