풀이

STEP II 1987, 문제 13

역학 • 벽과의 비스듬한 충돌

> **STEP II 1987, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q13

핵심 아이디어

매끄러운(smooth) 쿠션(cushion)은 자신에 수직인 속도 성분만 바꿀 수 있다. 그 성분은 방향이 반대가 되고 e배가 되며, 쿠션에 나란한 성분은 변하지 않는다. 이웃한 두 쿠션은 서로 다른 두 성분에 작용하므로, 각 성분은 한 번씩 방향이 바뀌고 e배가 된다. 닫힌 경로(closed path)를 찾을 때는 좌표를 써서 퍽(puck)을 쿠션에서 쿠션으로 따라가고, 유일하게 자유로운 양인 처음 기울기(slope)를 퍽이 출발점으로 되돌아오도록 정한다.

풀이

모형. 퍽은 매끄러운 쿠션이 있는 매끄러운 수평 테이블 위를 미끄러지는 입자이므로, 충돌과 충돌 사이에는 아무 힘도 받지 않고 일정한 속도로 직선 운동을 한다. 충돌할 때 쿠션이 주는 충격량(impulse)은 (쿠션이 매끄러우므로) 쿠션에 수직이고, 따라서 속도의 평행 성분은 변하지 않는다. 뉴턴(Newton)의 반발 법칙(law of restitution)에 따라 수직 성분은 방향이 반대가 되고 e배가 된다. $0 < e \leq 1$이라 한다.

테이블의 두 변을 따라 축을 잡아 테이블이 $0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq B$가 되도록 한다.

소문항 (i): 이웃한 두 쿠션

퍽의 속도를 (u, v)라 하자. 이웃한 쿠션은 $x =$ 상수 꼴의 쿠션 하나와 $y =$ 상수 꼴의 쿠션 하나이며, 어느 순서로든 부딪칠 수 있다. x-쿠션에 부딪치면 $(u, v) \mapsto (-eu, v)$가 되고, y-쿠션에 부딪치면 $(u, v) \mapsto (u, -ev)$가 된다. 순서와 상관없이 각각 한 번씩 부딪친 뒤의 속도는

$$(-eu,\ -ev) = -e\,(u, v).$$

이다. 이것은 처음 속도의 스칼라배이므로, 요구한 대로 마지막 경로는 처음 경로와 평행하다. 이제 퍽은 반대 방향으로 움직이며, 속력은 e배로 줄어든다.

소문항 (ii): 쿠션에서 출발하는 닫힌 경로

퍽이 쿠션 $y=0$ 위의 점 $P=(a,0)$에 정지해 있고 $a:(L-a)=z:1$이라 하자. 그러면

$$a=\frac{zL}{1+z},\qquad L-a=\frac{L}{1+z},\qquad 0<a<L.$$

이다. x축이 오른쪽, y축이 위쪽을 향하도록 테이블을 위에서 내려다보면, 쿠션 $y=0$에서 시계 방향으로 $x=0$, $y=B$, $x=L$을 차례로 만난다. 비를 반대쪽 끝에서 잰다면 z를 $1/z$로 바꾸면 되고, 논증은 달라지지 않는다. 퍽을 속도 $(-u,v)$ $(u,v>0)$로 치고, 기울기를 $k=v/u$라 쓰자. 네 구간에서의 속도는

$$(-u,v)\xrightarrow{x=0}(eu,v)\xrightarrow{y=B}(eu,-ev)\xrightarrow{x=L}(-e^2u,-ev)\xrightarrow{y=0}\cdots$$

이다.

- 구간 1, $(a,0)$에서 $x=0$까지: 수평 거리 a를 가는 동안 ak만큼 올라가므로, 왼쪽 쿠션의 $W_1=(0,\,ak)$에 부딪친다.
- 구간 2, 기울기 $v/(eu)=k/e$: $B-ak$만큼 올라가므로 가로로 $e(B-ak)/k$만큼 움직인다. 위쪽 쿠션과 $W_2=\big(e(B/k-a),\,B\big)$에서 만난다.
- 구간 3, 기울기 $-k$: 가로로 $L-x_{W_2}$만큼 움직이고 $k(L-x_{W_2})$만큼 내려가므로, 오른쪽 쿠션과 높이 $y_{W_3}=B-kL+e(B-ak)$에서 만난다.
- 구간 4, 기울기 k/e: y_{W_3}만큼 내려가면서 $e\,y_{W_3}/k$만큼 되돌아가, 다음 점에서 $y=0$에 닿는다.

$$x_{\text{끝}}=L-\frac{e\,y_{W_3}}{k}=(1+e)L+e^2a-\frac{e(1+e)B}{k}.$$

우리는 $x_{\text{끝}}=a$를 원한다. 그러면 $e(1+e)B/k=(1+e)L-(1-e^2)a=(1+e)\big(L-(1-e)a\big)$이므로

$$k=\frac{eB}{L-(1-e)a}=\frac{B}{L}\cdot\frac{e(1+z)}{1+ez}.$$

이다. $L-(1-e)a>L-a>0$이므로, 이 값은 모든 $z>0$에 대하여 양수이다.

> **생각해 보기** 이제 끝났는가? 우리는 퍽이 왼쪽, 위쪽, 오른쪽, 아래쪽 순서로 쿠션을 만난다고 가정했다.

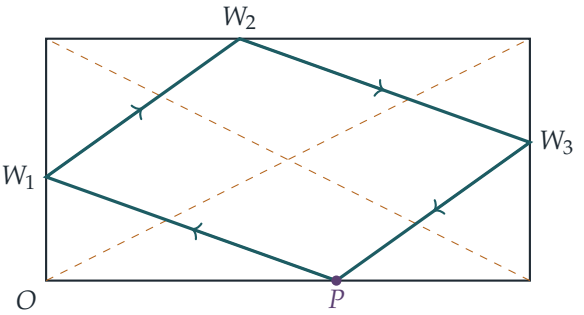
아니다. 각 충돌점이 정말로 가정한 변 위에 있는지 아직 확인해야 한다. $D=L-(1-e)a=$

$L - a + ea$라 쓰면 $k = eB/D$이다. 그러면

$$y_{W_1} = ak = \frac{eaB}{D},$$
$$x_{W_2} = e\left(\frac{D}{e} - a\right) = L - a,$$
$$y_{W_3} = B(1+e) - k(L+ea) = \frac{B\left[(1+e)(L-a+ea) - eL - e^2a\right]}{D} = \frac{B(L-a)}{D}.$$

이다. $0 < a < L$이고 $e > 0$이므로 $0 < ea < D$이고 $0 < L - a < D$이다. 따라서 $0 < y_{W_1} < B, 0 < x_{W_2} < L, 0 < y_{W_3} < B$이다. 각 충돌은 가정한 열린 변 위에서 일어나고, 어떤 모서리에도 부딪치지 않는다. 그러므로 모든 z에 대하여, 위의 기울기 k로 친 퍽은 왼쪽, 위쪽, 오른쪽을 거쳐 P로 돌아온다.

소문항 (i)에 의해 구간 1과 3이 평행하고 구간 2와 4도 평행하므로, 닫힌 경로는 테이블에 내접(inscribed)하는 평행사변형(parallelogram) $PW_1W_2W_3$이다.



점선은 대각선(diagonal)이다. 그린 경로는 $L = 2B$, $e = \frac{1}{2}$, $z = 1.5$인 경우이다.

소문항 (iii): 임의의 내부 점에서의 두 가지 샷

그러한 샷은 모두 소문항 (ii)의 경로 중 하나이다. 퍽이 내부의 점 Q에서 속도 $\mathbf{w}$로 출발하여 네 쿠션 위의 점 V_1, V_2, V_3, V_4에서 시계 방향 순서로 튕긴 뒤 Q로 돌아온다고 하자. 소문항 (i)을 두 번 적용하면, 네 번 튕긴 뒤의 속도는 $(-e)^2\mathbf{w} = e^2\mathbf{w}$이므로 처음과 같은 방향을 향한다. 따라서 마지막 구간 V_4Q와 첫 구간 QV_1은 같은 직선 위에 같은 방향으로 놓인다. 그러므로 $V_4 \to Q \to V_1$은 하나의 직선 구간이고, 퍽의 경로는 쿠션 위의 V_4에서 출발하여 나머지 세 쿠션에서 시계 방향으로 튕긴 뒤 V_4로 돌아오는 닫힌 경로이다. 소문항 (ii)의 계산은 이러한 경로의 기울기가 출발점에 의해 정해짐을 보여 준다. 그러한 경로는 각 변에 꼭짓점을 하나씩 가지므로, 모두 $0 < a < L$에 대한 소문항 (ii)의 평행사변형 Π_a이고, Q는 Π_a의 한 변 위에 있다. 역으로, Q가 어떤 Π_a의 한 변 위에 있으면, Q에서 그 변을 따라 진행 방향으로 치면 된다. 따라서 Q를 지나는 (평행사변형, 변)의 쌍의 개수를 세어야 한다.

z가 변할 때 변들이 테이블을 쓸고 지나가는 방식. z가 0에서 ∞까지 변하면 a는 0에서 L까지 변한다. 위의 식에서 y_{W_1}은 0에서 B까지 증가하고, $x_{W_2} = L - a$는 L에서 0까지 감소하며,

$y_{W_3} = B/\big(1 + ea/(L-a)\big)$는 B에서 0까지 감소한다. 따라서 Π_a는 O를 지나는 대각선에서 시작하여 ($a \to 0$일 때 꼭짓점들이 모서리 O와 (L, B)로 몰린다) 다른 대각선으로 끝난다. 이제 한 변, 예를 들어 PW_1을 보자. 이 변은 모서리 O에서 아래쪽 변을 따라 a, 왼쪽 변을 따라 y_{W_1}을 두 변으로 하는 삼각형을 잘라 낸다. 두 변의 길이가 모두 a에 대하여 순증가하므로, 이 삼각형들은 엄격하게 포개어지고 빗변들은 결코 교차하지 않는다. 삼각형은 아무것도 없는 상태에서 $(L, 0)$과 $(0, B)$를 잇는 대각선 아래쪽의 테이블 절반까지 연속적으로 커진다. 정확히 말하면, $Q = (q_1, q_2)$가 그 절반 안에 있을 때 함수

$$f(a) = \frac{q_1}{a} + \frac{q_2}{y_{W_1}(a)}$$

는 연속이고 순감소한다. $a \to 0$일 때 ∞로 발산하고 $a \to L$일 때 $q_1/L + q_2/B < 1$로 수렴하므로, $f(a) = 1$ (즉 Q가 PW_1 위에 있음)인 a는 정확히 하나 있다. Q가 그 절반 안에 있지 않으면 모든 a에 대하여 $f(a) > 1$이므로 PW_1은 결코 Q를 지나지 않는다. 같은 논증이 각 변에 적용된다.

- PW_1은 $(L, 0)$과 $(0, B)$를 잇는 대각선 아래쪽 절반을 한 번 쓸고 지나간다.
- W_2W_3은 그 대각선 위쪽 절반을 한 번 쓸고 지나간다.
- W_1W_2는 O와 (L, B)를 잇는 대각선 위쪽 절반을 한 번 쓸고 지나간다.
- W_3P는 그 대각선 아래쪽 절반을 한 번 쓸고 지나간다.

쿠션에서 떨어져 있고 대각선 위에 있지 않은 점 Q는 각 대각선에 대하여 정확히 한쪽에 놓인다. 따라서 서로 다른 두 평행사변형에 속하는 정확히 두 변이 Q를 지난다. 이것이 두 가지 샷이다. 각 샷은 퍽을 그 변을 따라 보내 네 쿠션을 모두 시계 방향으로 돌고 Q로 돌아오게 한다. (Q가 대각선 위에 있으면, 두 샷 중 하나는 모서리로 치는 샷으로 퇴화한다.)

검산

- $e = 1$이면 모든 z에 대하여 기울기가 $k = B/L$이므로 모든 변이 대각선과 평행하다. 이는 완전 탄성 쿠션에 대하여 흔히 쓰는 거울상 펼치기로 얻는 결과와 같다.
- $L = 2, B = 1, e = \frac{1}{2}, z = 1$로 두면 $a = 1, k = \frac{1}{3}$이고, 충돌점은 $(0, \frac{1}{3})$, $(1, 1)$, $(2, \frac{2}{3})$이다. 마지막 구간에서 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y = e/k = \frac{3}{2}$이므로, $\frac{2}{3}$만큼 내려가면서 1만큼 되돌아가 $(1, 0) = P$에 이른다.
- 퍽을 벽에서 벽으로 이동시키는 수치 시뮬레이션에서 세 소문항이 모두 성립했다. 임의로 고른 테이블, e의 값, z의 값에서 예측한 충돌점이 나왔고, 임의로 고른 내부 점들은 각각 닫힌 경로 중 정확히 두 개 위에 놓였다.

흔한 실수

- 거울상(펼치기, unfolding) 기법을 쓰는 것: $e < 1$이면 반사각이 입사각과 같지 않으므로 이 기법은 통하지 않는다.
- $x_{\text{끝}} = a$에서 k를 구하고, 각 충돌이 의도한 변 위에서 일어나는지 확인하지 않는 것.
- 소문항 (iii)에서 Q에서의 샷이 특정한 변을 따라 출발해야 한다고 가정하는 것. 첫 구간과 마지막 구간을 하나의 직선 구간으로 이어 주는 것은 소문항 (i)의 논증이다.

STEP 너머

이러한 경로를 **당구**(*billiards*)라 한다. $e = 1$인 경우는 그 자체로 하나의 분야를 이루며, 반사와 펼치기를 써서 연구하고 동역학계(dynamical systems)로 이어진다. 여기서는 쿠션이 에너지를 잃고, "한 바퀴 전의 속도 $\mapsto$ 한 바퀴 후의 속도"라는 사상은 e^2배의 순수한 축소이다. 그래서 퍽이 한 바퀴 돌 때마다 느려지더라도 모든 e에 대하여 닫힌 궤도가 존재한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 충격량과 반발을 꼼꼼하게 다룬다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 같은 성격의 문제가 더 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.