풀이

STEP II 1987, 문제 12

역학 • 평형과 에너지

> **STEP II 1987, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q12

핵심 아이디어

"모든 위치에서 평형(equilibrium)"이라는 말은 위치 에너지(potential energy)에 관한 진술이다. 구슬(bead)이 철사 위 어디에서든 정지해 있을 수 있다면, 구슬이 철사를 따라 미끄러지는 동안 계의 위치 에너지는 변할 수 없으므로 철사 위에서 일정해야 한다. 이 에너지를 구슬의 높이와 고리(ring)로부터의 거리로 나타내면 곧바로 곡선을 얻는다. 같은 사실 덕분에 두 번째 부분도 깔끔해진다. 위치 에너지가 일정하므로 에너지 보존(conservation of energy)에 의해 구슬과 입자의 운동 에너지(kinetic energy)의 합이 일정하고, 남은 일은 두 속력을 잇는 기하학적 관계를 찾는 것뿐이다.

풀이

구슬과 매달린 질량을 입자로, 실을 가볍고 늘어나지 않는(inextensible) 것으로, 고리와 철사를 매끄러운(smooth) 것으로 모형화한다. 고리를 원점 O에 두고, y는 연직 위쪽으로 잰다. 구슬의 위치를 극좌표(polar coordinates) (r,θ)로 나타내되 θ는 수평선에서 시계 반대 방향으로 재므로, 구슬은 O에 대하여 높이 $y = r\sin\theta$에 있다. 실의 길이를 L이라 하자.

곡선의 방정식

O에서 구슬까지의 실의 길이는 r이므로, 매달린 입자는 고리 아래로 $L - r$만큼 떨어져 있다. O를 기준 높이로 잡으면 계의 위치 에너지는

$$V = mgr\sin\theta - mg(L-r) = mg\left(r + r\sin\theta\right) - mgL.$$

이다. 철사가 매끄러우므로 철사가 구슬에 작용하는 반작용은 철사에 수직이고, 계를 철사를 따라 움직이게 할 수 있는 힘은 오직 V에서 비롯된다. 계가 어떤 위치에서 평형을 이루는

것은 그 위치에서 V가 철사를 따른 움직임에 대하여 정상(stationary)일 때와 정확히 같다. **모든** 위치에서 평형이라는 것은 철사 전체에서 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}s = 0$이라는 뜻이고(여기서 s는 호의 길이(arc length)이다), 따라서 V는 철사 위에서 일정하다:

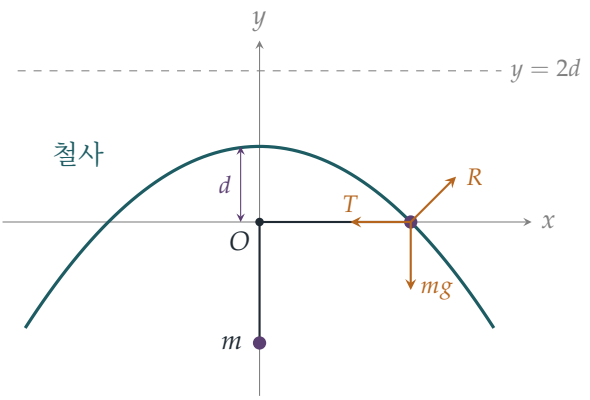
$$r(1+\sin\theta) = c \quad \text{적당한 상수} c.$$

힘을 분해해서도 이를 알 수 있다. 평형 상태에서 매달린 입자 때문에 실 전체의 장력(tension)은 mg이다(고리가 매끄럽기 때문이다). 구슬에서, O를 향하는 장력 mg의 접선 성분은 $-mg\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}$이고, 무게의 접선 성분은 $-mg\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$이다. 이 둘이 상쇄되어야 하므로 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(r+y) = 0$이고, 이는 같은 조건이다.

c를 구하자. $1+\sin\theta \le 2$이므로 $r = c/(1+\sin\theta) \ge c/2$이고, 등호는 $\theta = \frac{\pi}{2}$일 때(고리 바로 위에 있는 철사의 점) 성립한다. 따라서 고리에서 철사까지의 최단 거리는 $c/2$이므로 $c = 2d$이고, 곡선은

$$\boxed{r(1+\sin\theta) = 2d} \qquad \text{즉} \qquad r = \frac{2d}{1+\sin\theta}.$$

이다. (θ를 연직 아래 방향에서 재면 같은 곡선은 $r(1-\cos\theta) = 2d$로 쓰인다.) $r = 2d - y$이므로 철사 위의 모든 점은 O까지의 거리와 수평선 $y = 2d$까지의 거리가 같다. 그러므로 철사는 초점(focus)이 고리에 있고 준선(directrix)이 고리보다 $2d$ 높은 곳에 있는 포물선(parabola)이다. 직교좌표로는 $x^2 = 4d(d-y)$이고 꼭짓점(vertex)은 $(0, d)$이다.



그림에서 구슬은 고리와 같은 높이에 있다. 그곳에서 포물선의 기울기가 정확히 -1이므로 장력 $T = mg$, 무게 mg, 수직항력(normal reaction) R이 균형을 이룬다.

구슬의 속력

이제 구슬이 철사를 따라 속력 u로 움직인다. 실은 팽팽한 상태를 유지하고 길이가 고정되어 있으므로, 매달린 입자는 여전히 고리 아래로 $L - r$만큼 떨어져 있다.

? 생각해 보기 매달린 입자는 얼마나 빠르게 움직이는가?

입자의 고리 아래 깊이는 $L-r$이므로, 그 속도는 연직 방향이고 속력은 $|\dot{r}|$이다. $\dot{r}$은 구슬 속도의 반지름 방향 성분일 뿐, 전체 속력 u가 아님에 주의하라.

움직이기 시작하면 장력은 더 이상 mg가 아니지만, 계 전체에 대해 알짜 일을 하지 않는다. 실이 늘어나지 않고 고리가 매끄러우므로, 장력이 구슬에 한 일은 매달린 입자에 한 일과 상쇄된다. 철사의 반작용은 구슬의 운동에 수직이므로 일을 하지 않는다. 따라서 에너지가 보존된다:

$$\tfrac{1}{2}mu^2 + \tfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + V = \text{상수}.$$

그런데 첫 번째 부분에 의해 철사 위에서 $V = mg\cdot 2d - mgL$은 일정하다. 그러므로

$$u^2 + \dot{r}^2 = \text{상수}. \qquad (*)$$

다음으로 $\dot{r}$과 u를 연결한다. $r = 2d/(1+\sin\theta)$를 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{2d\cos\theta}{(1+\sin\theta)^2} = -\frac{r\cos\theta}{1+\sin\theta}, \qquad \text{따라서} \qquad \dot{r}^2 = r^2\dot{\theta}^2\,\frac{\cos^2\theta}{(1+\sin\theta)^2} = r^2\dot{\theta}^2\,\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta},$$

이다. 여기서 $\cos^2\theta = (1-\sin\theta)(1+\sin\theta)$를 이용했다. 곡선의 방정식에서 $1+\sin\theta = 2d/r$이고 $1-\sin\theta = 2-2d/r = 2(r-d)/r$이므로

$$\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta} = \frac{r-d}{d}, \qquad \text{따라서} \qquad \dot{r}^2 = \frac{r-d}{d}\,r^2\dot{\theta}^2.$$

극좌표에서 속력은 $u^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$를 만족하므로

$$u^2 = r^2\dot{\theta}^2\left(\frac{r-d}{d}+1\right) = \frac{r}{d}\,r^2\dot{\theta}^2, \qquad \text{그러므로} \qquad \dot{r}^2 = \frac{r-d}{r}\,u^2.$$

? 생각해 보기 $r=d$일 때 $\dot{r}$은 무엇인가?

$r=d$에서 구슬은 꼭짓점 $\theta=\frac{\pi}{2}$에 있고, 여기서 r은 최솟값을 가지며 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta = 0$이다. 따라서 그곳에서 $\dot{r}=0$이고(공식 $\dot{r}^2 = \frac{r-d}{r}u^2$도 그렇게 말해 준다), 매달린 입자는 순간적으로 정지해 있다. 그러므로 $(*)$의 상수는 v^2이다:

$$u^2 + \frac{r-d}{r}\,u^2 = v^2 \quad\Longrightarrow\quad u^2\,\frac{2r-d}{r} = v^2 \quad\Longrightarrow\quad u = \left(\frac{r}{2r-d}\right)^{\frac{1}{2}} v,$$

u와 v는 속력이므로 양의 제곱근을 택했다. 이것이 구하는 결과이다.

검산

▶ $r=d$에서 공식은 마땅히 그래야 하듯 $u=v$를 준다.

- $r \to \infty$일 때 $u \to v/\sqrt{2}$이다. 멀리 나가면 포물선의 접선(tangent)은 거의 반지름 방향을 향하므로 $\dot{r} \approx u$이고, 운동 에너지 $\frac{1}{2}mv^2$는 구슬과 입자에 똑같이 나누어진다.
- 고리와 같은 높이에서의 평형: 점 $(2d, 0)$은 곡선 위에 있고, 그곳에서 장력 mg(수평)와 무게 mg(연직)의 합력은 45° 방향을 향하며, 이는 그 점에서 기울기가 -1인 포물선에 수직이다.
- 수치적으로, $d = 1.3$, $v = 2$로 두고 구슬과 입자로 이루어진 계의 운동 방정식을 꼭짓점에서부터 포물선을 따라 적분했다. $r = 2.8905$에서 구슬의 속력은 1.606309였고, 이는 $\sqrt{r/(2r-d)}\,v$와 약 10^{-8} 이내로 일치했다. 또한 철사 위의 무작위로 고른 1000개의 점에서 정지한 구슬에 작용하는 접선 방향 힘이 0임을 확인했다.

흔한 실수

- 매달린 입자의 운동 에너지를 빠뜨려서 모든 r에 대해 $u = v$를 얻는 실수. 위치 에너지는 일정하지만 운동 에너지는 나누어진다.
- 입자의 속력을 $|\dot{r}|$ 대신 u로 잡는 실수. 구슬 운동의 반지름 방향 성분만이 실을 고리를 통해 끌어당긴다.
- θ를 다른 직선에서 재 놓고 $r(1+\sin\theta) = 2d$를 그대로 쓰는 실수. 올바른 극방정식이라면 어떤 형태든 괜찮지만, θ를 어느 직선에서 재는지 밝혀야 한다.

STEP 너머

계는 위치 에너지가 정상인 곳에서 평형을 이룬다는 생각이 **가상일의 원리**(*principle of virtual work*)이며, 이는 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)으로 이어진다. 라그랑주 역학에서는 운동 에너지를 하나의 일반화 좌표(generalised coordinate)(여기서는 θ)로 나타내고, 장력을 전혀 구하지 않고도 그로부터 운동 방정식을 얻는다. 이 철사 위에서는 V가 일정하므로 구슬과 입자는 마치 아무 힘도 작용하지 않는 것처럼 움직이며, 우리가 얻은 관계는 운동 에너지 $\frac{1}{2}m\,r^2(2r-d)\dot{\theta}^2/d$의 보존일 뿐이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 에너지 방법과 구속 운동을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.