풀이

# STEP II 1987, 문제 11

역학 • 마찰과 모멘트

> **STEP II 1987, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q11

## 핵심 아이디어

회전축에서의 힘은 알지 못하며 구할 필요도 없으므로, 그 힘의 모멘트가 0이 되는 회전축 $O$에 대하여 모멘트(moment)를 잡는다. 막대는 3차원 공간에 놓여 있지만, 고리의 평면은 두 가지 자연스러운 방향을 준다. 하나는 평면에 수직인 방향(수직항력이 작용하는 방향)이고, 다른 하나는 평면 안의 방향(마찰력이 작용하는 방향)이다. 무게도 같은 방식으로 나누면, 한 모멘트 방정식에서 수직항력을, 다른 모멘트 방정식에서 마찰력을 얻는다. 둘의 비가 $\mu$이다.

## 풀이

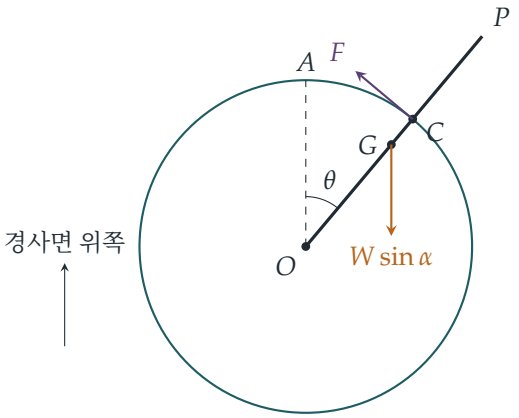
**모형.** 막대는 무게가 $W$인 균일한 막대(uniform rod) $OP$이고, 질량중심(centre of mass) $G$는 막대의 중점에 있으므로 $OG = \frac{1}{2}b$이다. 막대는 고리의 중심 $O$에 매끄러운 회전축(smooth pivot)으로 고정되어 있다. 막대는 원주 위의 한 점 $C$에서 고리 위에 걸쳐 놓여 있으므로 $OC = a$이다. $O$와 $C$가 모두 고리의 평면 위에 있으므로 막대도 그 평면 위에 놓인다. 고리의 가장 높은 점을 $A$라 하면, $OA$는 최대 경사선(line of greatest slope)을 따라 곧장 위쪽을 향하고, $\angle AOC = \theta$라 하자.

**힘.** 막대에 작용하는 힘은 다음과 같다.

- $G$에 작용하는 무게 $W$;
- 매끄러운 회전축 $O$에서의 힘. 이 힘은 알지 못하지만 $O$에 대한 모멘트는 0이다;
- $C$에서의 접촉력. 막대와 고리의 철사는 $C$에서 교차한다. 막대는 반지름을 따라 놓이고 철사는 접선을 따라 놓이며, 둘 다 평면 위에 있으므로 두 방향에 공통으로 수직인 방향

은 평면에 수직이다. 따라서 수직항력(normal reaction) $R$는 고리의 평면에 수직이다. 마찰력(friction) $F$는 평면 안에 있다. 막대는 $O$를 중심으로 회전하는 방식으로만 움직일 수 있고, 이때 $C$는 고리의 접선 방향으로 움직인다. 따라서 마찰력은 그 접선을 따라, 즉 막대에 수직으로 작용한다.

무게를 평면에 수직인 성분 $W\cos\alpha$(평면 안쪽으로 향함)와 평면 안에서 최대 경사선을 따라 아래로 향하는 성분 $W\sin\alpha$로 분해한다. 그림은 평면을 수직으로 내려다본 모습이며, $A$가 위쪽에 있다. $R$는 $C$에서 지면 밖으로 향한다.




**$O$에 대한 모멘트.** 회전축이 매끄러우므로, 나머지 힘들의 $O$에 대한 모멘트의 합은 $O$를 지나는 **모든** 축에 대하여 0이다. 두 축이 유용한 방정식을 준다.

**평면 안에서 $O$를 지나고 막대에 수직인 축.** 이 축에 대해서는 평면에 수직인 힘들만 모멘트를 가진다. 이 힘들은 거리 $\frac{1}{2}b$에 있는 $W\cos\alpha$와 거리 $a$에 있는 $R$이다. 평면 안의 힘 $F$와 $W\sin\alpha$는 이 축과 만나거나 이 축에 평행하므로 이 축에 대한 모멘트가 없다. 따라서

$$R\,a = W\cos\alpha\cdot\tfrac{1}{2}b, \qquad \text{따라서} \qquad R = \frac{Wb\cos\alpha}{2a}.$$

**$O$를 지나고 평면에 수직인 축.** 이번에는 평면 안의 힘들만 고려하면 된다. 막대는 경사면 위쪽 방향과 각 $\theta$를 이루므로, $W\sin\alpha$의 막대에 수직인 성분은 $W\sin\alpha\sin\theta$이고 거리 $\frac{1}{2}b$에서 작용한다. 마찰력은 이미 막대에 수직이며 거리 $a$에서 작용한다. 따라서

$$F\,a = W\sin\alpha\sin\theta\cdot\tfrac{1}{2}b, \qquad \text{따라서} \qquad F = \frac{Wb\sin\alpha\sin\theta}{2a}.$$

무게의 평면 안 성분은 막대를 $A$에서 멀어지도록, 즉 고리의 아래쪽으로 돌리려 하고, 마찰력은 이에 저항한다.

? **생각해 보기** 마찰력이 막대 방향의 성분도 가질 수 있지 않을까?

막대 방향의 힘은 $O$를 지나므로 $O$에 대한 모멘트가 없다. 이런 힘은 회전을 돕지도 막지도 못하며, 막대 방향의 힘은 회전축이 얼마든지 공급할 수 있다. 가능한 운동은 $O$를 중심으로 한 회전뿐이므로, 한계 평형에서 중요한 마찰력은 접선 방향 성분, 즉 $F$이다. 마찰력은 전부 접선 방향으로 작용한다고 본다.

**한계 평형.** 한계 평형(limiting equilibrium)에서는 $F = \mu R$이다.

$$\frac{Wb\sin\alpha\sin\theta}{2a} = \mu\frac{Wb\cos\alpha}{2a} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\mu = \tan\alpha\,\sin\theta}$$

(여기서 $0 \le \theta \le \pi$로 잡는다). 막대는 $\tan\alpha\sin\theta \le \mu$일 때마다 각 $\theta$에서 평형 상태로 정지해 있다. $a, b, W$가 모두 약분되었다는 점에 주목하자.

## 검산

- $\theta = 0$ 또는 $\theta = \pi$이면 막대는 최대 경사선을 따라 놓인다. 이때 무게의 평면 안 성분은 막대 방향으로 곧장 당기므로 마찰력이 필요 없다. 즉 $\mu = 0$이다. $\alpha = 0$일 때도 마찬가지인데, 고리가 수평이면 무게의 평면 안 성분이 없기 때문이다.
- 마찰력이 가장 많이 필요한 경우는 막대가 수평인 $\theta = \frac{1}{2}\pi$일 때이다. 이때 $\mu = \tan\alpha$이며, 이는 경사각이 $\alpha$인 경사면 위의 물체와 일치한다.
- 수치 검산에서는 $\alpha, \theta, a, b, W$를 무작위로 2000번 골라 힘들을 3차원 벡터로 구성하였다. $O$에 대한 벡터 모멘트 방정식을 $R$와 $F$에 대하여 풀었더니, $F/R$가 $\tan\alpha\sin\theta$와 $4 \times 10^{-15}$ 이내로 일치하였다. 예를 들어 $\alpha = 30°, \theta = 60°$이면 $\mu = \frac{1}{2}$이다.

## 흔한 실수

- $C$에서의 수직항력이 반지름 방향이라고 생각하는 것. 이는 연직 평면 위의 고리 **안쪽**에 막대가 놓여 있을 때의 경우이다. 여기서는 막대가 철사 위에 걸쳐 놓여 있으므로, 수직항력은 고리의 평면에 수직이다.
- 모멘트를 잡는 대신 힘을 분해하는 것. 그러면 회전축에서의 힘의 미지 성분 세 개가 들어오는데, 문제에서는 이를 원하지 않는다.

## STEP 너머

여기서는 $O$를 지나는 서로 수직인 두 축에 대하여 모멘트를 잡았다. 이는 하나의 벡터 방정식 $\sum \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$을 간단히 쓴 것으로, 이 방정식은 $O$에 대한 전체 돌림힘(torque)이 0임을 뜻한다. 벡터로서의 돌림힘과 3차원 강체(rigid body)의 평형 조건은 대학 1학년 역학

에서 표준적으로 다루는 내용이다. 이는 고정점을 중심으로 한 강체의 회전으로 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 바로 이런 방식으로 돌림힘과 각운동량(angular momentum)을 벡터로 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.