풀이

STEP II 1987, 문제 10

순수수학 • 군의 공리

> **STEP II 1987, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q10

핵심 아이디어

모든 일은 아래첨자(subscript)에서 일어나므로, 각 연산을 첨자 $1, 2, \ldots, N$에 대한 평범한 산술로 바꾸어 생각한다. 첫 번째 연산은 "최댓값을 취한다"이고, 두 번째 연산은 "두 수의 거리를 구한 뒤 1을 더한다"이다. 그런 다음 네 가지 공리(axiom), 즉 닫힘성(closure), 결합법칙(associativity), 항등원(identity), 역원(inverse)을 하나씩 확인한다. 성립하지 않는 공리는 구체적인 반례(counterexample) 하나만 있으면 충분하고, 성립하는 공리는 일반적인 논증이 필요하다.

풀이

이 풀이 전체에서 $a_j \circ a_k$의 첨자를 $j \circ k$로 쓰고, $*$에 대해서도 마찬가지로 쓴다. 두 원소는 첨자가 같을 때, 그리고 그때에만 같다.

연산 $\circ$

여기서 $a_j \circ a_k = a_{\max(j,k)}$이다.

닫힘성이 성립한다. $1 \le j, k \le N$이면 $\max(j,k)$는 j와 k 중 하나이므로 $\{1, \ldots, N\}$에 속하고, 따라서 $a_j \circ a_k \in S$이다.

결합법칙이 성립한다. 임의의 j, k, l에 대하여

$$(a_j \circ a_k) \circ a_l = a_{\max(\max(j,k),l)} = a_{\max(j,k,l)} = a_{\max(j,\max(k,l))} = a_j \circ (a_k \circ a_l),$$

이다. 두 가지 괄호 묶음 모두 세 첨자 중 가장 큰 것을 주기 때문이다.

항등원이 존재한다: 바로 a_1이다. 모든 첨자는 1 이상이므로 $\max(1,k) = \max(k,1) = k$이

고, 따라서 모든 k에 대하여 $a_1 \circ a_k = a_k \circ a_1 = a_k$이다.

역원은 존재하지 않는다. a_j의 역원은 $a_j \circ a_k = a_1$, 즉 $\max(j,k) = 1$을 만족하는 어떤 a_k일 것이다. 그런데 $\max(j,k) \geq j$이므로 $j \geq 2$이면 이는 불가능하다. 예를 들어 모든 k에 대하여 $a_2 \circ a_k$는 a_2이거나 그보다 뒤의 원소이며, 결코 a_1이 되지 않는다. 역원을 갖는 원소는 a_1뿐이다(그 역원은 자기 자신이다).

따라서 $\circ$에 대한 S는 닫힘성, 결합법칙, 항등원은 만족하지만 역원은 만족하지 않으므로 군(group)이 아니다.

> **생각해 보기** 다른 어떤 원소가 항등원이 될 수 있어서, 역원에 대한 논증을 다시 해야 하지는 않을까?

그렇지 않다. 항등원은 유일하다. e와 e'이 모두 항등원이라면 $e = e \circ e' = e'$이다. 따라서 "$a_j \circ a_k$가 항등원과 같다"에서 항등원이 될 수 있는 후보는 a_1뿐이며, 위의 논증으로 충분하다.

연산 $*$

여기서 $a_j * a_k = a_{|j-k|+1}$이다. $N = 4$일 때 첨자의 연산표는 다음과 같다.

$*$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	2	3
3	3	2	1	2
4	4	3	2	1

이 표에서 보이는 규칙은 모든 N에 대하여 성립한다.

닫힘성이 성립한다. $1 \leq j,k \leq N$이면 $0 \leq |j-k| \leq N-1$이므로 $1 \leq |j-k|+1 \leq N$이고, 따라서 $a_j * a_k \in S$이다.

항등원이 존재한다: 바로 a_1이다. $k \geq 1$이므로 $|1-k| = k-1$이고, 따라서 $a_1 * a_k = a_k$이다. 마찬가지로 $a_k * a_1 = a_k$이다($|j-k| = |k-j|$이므로 이 연산은 교환법칙(commutative law)을 만족한다).

역원이 존재한다. $a_j * a_j = a_{0+1} = a_1$은 항등원이므로, 모든 원소는 자기 자신이 역원이다. (표에서 대각선에 1이 늘어선 것이 바로 이것이다.)

결합법칙은 성립하지 않는다. a_2, a_2, a_3을 택하자. 이를 위해서는 $N \geq 3$이어야 한다.

$$(a_2 * a_2) * a_3 = a_1 * a_3 = a_3,$$
$$a_2 * (a_2 * a_3) = a_2 * a_{|2-3|+1} = a_2 * a_2 = a_1.$$

두 값이 다르므로 $*$는 결합법칙을 만족하지 않는다.

따라서 $*$에 대한 S는 닫힘성, 항등원, 역원은 만족하지만 결합법칙은 만족하지 않으므로, 이 경우에도 군이 아니다.

? 생각해 보기 $N > 2$라는 조건은 어디에서 쓰였는가?

a_3을 사용하는 결합법칙의 반례에서만 쓰였다. $N = 2$이면 연산표는 위수 2인 군의 연산표가 되고(a_1이 항등원이고 $a_2 * a_2 = a_1$), $*$는 결합법칙을 만족한다. 한편 $\circ$에 대한 역원 논증에는 a_2만 필요하므로, $N = 2$일 때에도 $\circ$는 군이 되지 못한다.

검산

작은 경우를 모두 직접 확인하였다. 2부터 9까지의 모든 N에 대하여 결합법칙을 확인하기 위해 모든 세 쌍을 나열하고, 항등원과 역원을 직접 찾아보았다. $\circ$의 경우: 닫혀 있고, 결합법칙을 만족하며, 항등원은 a_1이고, 역원을 갖는 원소는 a_1뿐이다. $*$의 경우: 닫혀 있고, 항등원은 a_1이며, 모든 원소가 자기 자신의 역원이고, 결합법칙은 모든 $N \geq 3$에 대하여 ((a_2, a_2, a_3)에서를 포함하여) 성립하지 않지만 $N = 2$일 때는 성립한다. $N = 3$인 경우는 3×3 연산표를 이용하여 손으로 1분이면 확인할 수 있다.

흔한 실수

- "최댓값"은 곱셈과 다르다는 이유로 $\circ$에 항등원이 없다고 주장하는 것. 가장 작은 원소를 확인해 보라. a_1이 항등원이 된다.
- $*$의 결합법칙을 일반적으로 증명하려 하거나, a_1이 포함된 세 쌍만 확인하는 것(a_1은 항등원이므로 이런 세 쌍은 언제나 결합법칙을 만족한다). 필요한 것은 구체적인 반례 하나이다.
- 닫힘성을 잊는 것. 당연하게 여기기 쉽지만, 여기서는 $|j - k| \leq N - 1$이라는 부등식이 필요하다.

STEP 너머

$\circ$에 대한 S처럼 결합법칙을 만족하는 연산과 항등원을 갖춘 집합을 **모노이드**(monoid)라고 한다. 전순서 집합(totally ordered set) 위의 "최댓값" 연산은 대표적인 예이며, 이는 **반격자**(semilattice)이기도 하다. $*$에 대한 S처럼 닫힘성, 항등원, 역원은 만족하지만 결합법칙은 만족하지 않는 집합은, 결합법칙이 다른 세 공리로부터 이끌어 낼 수 없는, 진정으로 독립적인 공리임을 보여 준다. 군의 공리들이 어떻게 함께 작동하는지에 대해서는 Allenby,

Rings, Fields and Groups(환, 체, 군)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.