풀이

STEP II 1987, 문제 1

순수수학 • 대수적 항등식

> **STEP II 1987, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q1

핵심 아이디어

문자 하나를 다른 문자로 나타내어 대입하려 하지 말자. 대신 우변을 전개(expansion)한다. 제곱 a^2, b^2, c^2은 양변에 모두 나타나 소거되므로, 남는 것은 x와 일차식의 곱이다. 그리고 그 일차식은 바로 주어진 조건의 상수배이다. 수 7과 11이 어디서 나오는지 알고 나면 일반적인 결과는 저절로 따라온다.

풀이

전개를 일반적인 경우에 대해 한 번 해 두면 편리하다. 임의의 수 p, q, r에 대하여

$$(px-a)^2+(qx-b)^2+(rx-c)^2=(p^2+q^2+r^2)x^2-2x(pa+qb+rc)+a^2+b^2+c^2,$$

이므로

$$(px-a)^2+(qx-b)^2+(rx-c)^2-(a^2+b^2+c^2)=x[(p^2+q^2+r^2)x-2(pa+qb+rc)]. \qquad (*)$$

이다.

소문항 (i)

여기서는 $(p,q,r)=(1,2,3)$이므로 $p^2+q^2+r^2=14$이고, $(*)$는 다음과 같이 된다.

$$(x-a)^2+(2x-b)^2+(3x-c)^2-(a^2+b^2+c^2)=x[14x-2(a+2b+3c)].$$

$a+2b+3c=7x$이면 대괄호 안은 $14x-14x=0$이다. 따라서 양변은 같고, 이것이 보이려던 것이다.

소문항 (ii)

이제 $(p,q,r)=(2,3,3)$이므로 $p^2+q^2+r^2=4+9+9=22$이고

$$(2x-a)^2+(3x-b)^2+(3x-c)^2-(a^2+b^2+c^2)=x[22x-2(2a+3b+3c)].$$

이다. $2a+3b+3c=11x$이면 대괄호 안은 $22x-22x=0$이므로 (ii)가 증명된다.

> **?** **생각해 보기** 왜 (i)에서는 7이고 (ii)에서는 11일까?

이 수들은 $p^2+q^2+r^2$의 절반이다. 즉 $7=\frac{1}{2}(1+4+9)$이고 $11=\frac{1}{2}(4+9+9)$이다. 이로부터 일반적인 명제가 어떤 모양이어야 하는지 알 수 있다.

일반적인 결과

항등식(identity) $(*)$로부터 다음이 바로 증명된다.

임의의 실수 p,q,r,a,b,c,x에 대하여

$$2(pa+qb+rc)=(p^2+q^2+r^2)\,x,$$

이면

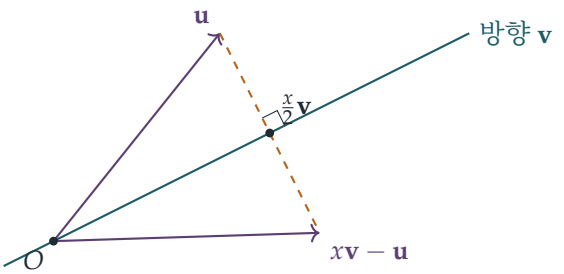
$$a^2+b^2+c^2=(px-a)^2+(qx-b)^2+(rx-c)^2.$$

이다. 소문항 (i)은 $(p,q,r)=(1,2,3)$인 경우이고, 소문항 (ii)는 $(p,q,r)=(2,3,3)$인 경우이다.

같은 전개는 변수의 개수와 상관없이 성립한다. $2\sum_{i=1}^{n}p_ia_i=(\sum_{i=1}^{n}p_i^2)x$이면 $\sum a_i^2=\sum(p_ix-a_i)^2$이다. 또한 $(*)$로부터 역(converse)도 얻는다. 즉 $x\neq 0$이고 항등식이 성립하면 조건도 반드시 성립한다.

기하학적으로 무슨 일이 일어나는가

$\mathbf{u}=(a,b,c)$, $\mathbf{v}=(p,q,r)$라 하자. 조건은 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\frac{x}{2}|\mathbf{v}|^2$이 되는데, 이는 $\frac{x}{2}\mathbf{v}$가 $\mathbf{u}$에서 O를 지나고 방향이 $\mathbf{v}$인 직선에 내린 수선의 발(foot of the perpendicular)이라는 뜻이다. 그러면 벡터 $x\mathbf{v}-\mathbf{u}=2\cdot\frac{x}{2}\mathbf{v}-\mathbf{u}$는 그 직선에 대한 $\mathbf{u}$의 반사(reflection)이다. 반사는 길이를 보존하므로 $|x\mathbf{v}-\mathbf{u}|=|\mathbf{u}|$이고, 이것이 바로 그 항등식이다.



검산

(i)에 $x = 1, a = b = 0, c = \frac{7}{3}$을 넣어 보자. 좌변은 $\frac{49}{9}$이고 우변은 $1 + 4 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 5 + \frac{4}{9} = \frac{49}{9}$이다. 또한 두 소문항과 일반적인 결과를 각각 무작위로 고른 2000개의 경우(일반적인 경우는 변수 최대 6개)에 대해 정확한 유리수 산술(exact rational arithmetic)로 확인하였고, $x \neq 0$이고 조건이 성립하지 않을 때는 항상 항등식도 성립하지 않음을 확인하였다.

흔한 실수

- 처음부터 $c = \frac{1}{3}(7x - a - 2b)$를 대입하는 것. 풀리기는 하지만 계산이 지저분하고 구조가 가려진다.
- 일반적인 결과를 k와 p, q, r 사이의 관계 없이 "$pa + qb + rc = kx$"로 제시하는 것. 항등식이 성립하려면 $k = \frac{1}{2}(p^2 + q^2 + r^2)$이어야 한다.

STEP 너머

이 기하학적 그림은 선형대수학(linear algebra)의 출발점이다. 사상 $\mathbf{u} \mapsto 2\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} - \mathbf{u}$는 반사이며 직교 선형 사상(orthogonal linear map)이다. 그리고 직교 사상은 정확히 길이를 보존하는 선형 사상이다. 이와 같은 사영(projection)과 반사는 최소제곱법(least squares)과 수치 계산에서 쓰이는 하우스홀더 변환(Householder transformations)의 바탕이 된다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 이러한 아이디어를 같은 기하학적 관점에서 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.