풀이

STEP I 1987, 문제 9

순수수학 • 무게중심 좌표

> **STEP I 1987, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q9

핵심 아이디어

A에서 B 쪽으로 이동한다는 것은 벡터(vector) $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$의 일정 비율만큼을 더하는 일이다. 이것을 한 번 하면 선분 위의 점들을 얻는다. 이것을 두 번, 즉 먼저 AB를 따라 이동한 뒤 그 점에서 C 쪽으로 이동하면 삼각형 전체를 쓸고 지나간다. 그림을 그릴 때의 요령은 각 경우를 이미 이해하고 있는 모양으로 다시 쓰는 것이다. 즉 삼각형의 경우를 뒤집은 것이거나, 한 점 A에 두 변 벡터의 배수를 더한 것으로 바꾸어 쓴다.

풀이

AB 위의 점

선분(segment) AB 위의 점 P는 A에서 출발하여 $\overrightarrow{AB}$를 따라 전체의 비율 t만큼 이동하면 도달한다. 여기서 $0 \le t \le 1$이다($t = 0$이면 A, $t = 1$이면 B이다). 따라서

$$\mathbf{p} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (1 - t)\mathbf{a} + t\,\mathbf{b}.$$

$\rho = 1 - t, \sigma = t$로 놓자. 그러면 $\rho \ge 0, \sigma \ge 0$이고(왜냐하면 $0 \le t \le 1$이므로), $\rho + \sigma = 1$이다. 이것이 구하는 꼴이다. 역으로, 이러한 쌍 ρ, σ는 모두 $t = \sigma$로 잡으면 선분 위의 한 점을 준다.

PC 위의 점과 삼각형 내부의 점

똑같은 방법으로, 선분 PC 위의 점 Q의 위치벡터(position vector)는 다음과 같다.

$$\mathbf{q} = (1 - s)\mathbf{p} + s\,\mathbf{c}, \qquad 0 \le s \le 1.$$

$\mathbf{p} = \rho\mathbf{a} + \sigma\mathbf{b}$를 대입하면

$$\mathbf{q} = (1-s)\rho\,\mathbf{a} + (1-s)\sigma\,\mathbf{b} + s\,\mathbf{c}.$$

$\lambda = (1-s)\rho, \mu = (1-s)\sigma, \nu = s$라 하자. 각각은 음이 아닌 수들의 곱이므로 $\lambda, \mu, \nu \geq 0$이다. 또한

$$\lambda + \mu + \nu = (1-s)(\rho+\sigma) + s = (1-s) + s = 1.$$

? 생각해 보기 왜 삼각형 내부의 모든 점은 어떤 선분 PC 위에 놓이는가?

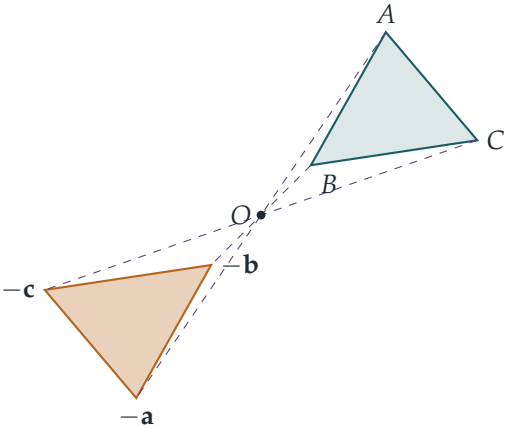
삼각형 내부(또는 경계 위)의 점 X를 잡자. $X = C$이면 증명할 것이 없다. $s = 1$로 잡으면 된다. 그렇지 않으면 C에서 X를 지나는 직선을 긋고 이를 X 너머로 연장한다. X가 각 ACB의 내부에 있으므로 이 직선은 CA와 CB 사이에 머물고, 따라서 대변 AB와 반드시 만난다. 그 점을 P라 하자. X는 삼각형 안에 있으므로 C와 P 사이에 놓이고, 따라서 X는 선분 PC 위에 있다. 위의 계산에 의해 $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c}$이고 $\lambda, \mu, \nu \geq 0, \lambda + \mu + \nu = 1$이다. 이것이 보이려던 것이다.

소문항 (i)

$\lambda = -\lambda', \mu = -\mu', \nu = -\nu'$로 쓰자. 그러면 조건은 $\lambda', \mu', \nu' \geq 0, \lambda' + \mu' + \nu' = 1$이 되고, 점은 다음과 같다.

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c} = -\left(\lambda'\mathbf{a} + \mu'\mathbf{b} + \nu'\mathbf{c}\right).$$

방금 보인 사실에 의해 괄호 안의 식은 삼각형 ABC의 모든 점을 지난다(첫 부분의 역과 함께 생각하면, 이러한 결합은 모두 삼각형 안에 있다). 따라서 구하는 영역은 X가 삼각형 ABC 안에 있을 때의 점 $-\mathbf{x}$ 전체의 집합이다. 다시 말해 꼭짓점이 $-\mathbf{a}$, $-\mathbf{b}$, $-\mathbf{c}$인 삼각형과 그 내부이며, 이는 삼각형 ABC를 원점 O에 대하여 반 바퀴 회전(half-turn)시킨 상이다.



호박색으로 칠한 삼각형이 (i)의 답이다. 각 꼭짓점은 ABC의 꼭짓점을 O에 대하여 대칭이동한 점이며, 이를 점선으로 나타내었다.

소문항 (ii)

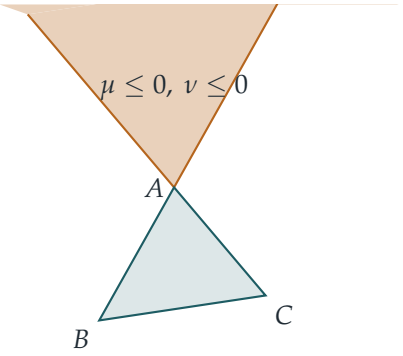
이제 $\lambda = 1 - \mu - \nu$이므로

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mu(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \nu(\mathbf{c} - \mathbf{a}).$$

즉 A에서 출발하여 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{AC}$의 배수를 더하는 것이다. $\mu = -m, \nu = -n$ $(m, n \geq 0)$으로 쓰면 점은 다음과 같다.

$$\mathbf{a} + m(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + n(\mathbf{a} - \mathbf{c}), \qquad m \geq 0,\ n \geq 0.$$

벡터 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$는 BA를 A 너머로 연장한 방향을 가리키고, $\mathbf{a} - \mathbf{c}$는 CA를 A 너머로 연장한 방향을 가리킨다. 평행하지 않은 두 벡터의 음이 아닌 결합은 두 벡터 사이의 각을 정확히 채운다($\mathbf{b} - \mathbf{a}$와 $\mathbf{c} - \mathbf{a}$가 평행하지 않으므로, 평면의 모든 점은 $\mathbf{a} + m(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + n(\mathbf{a} - \mathbf{c})$의 꼴로 나타나며 이때의 쌍 m, n은 정확히 하나이다). 따라서 구하는 영역은 꼭짓점이 A이고 BA와 CA를 A 너머로 연장한 반직선으로 둘러싸인 무한한 쐐기 모양의 영역이며, 경계의 반직선(ray)도 포함한다. 이것은 각 BAC의 맞꼭지각(vertically opposite angle)이다. 문제에서 λ에는 제한이 없지만, 여기서는 자동으로 1 이상이 된다는 점에 주의하자.



호박색 쐐기 모양의 영역(끝없이 이어진다)이 (ii)의 답이다. 그 경계는 변 BA와 CA를 A를 지나 연장한 것이다. 참고로 청록색 삼각형 ABC를 함께 나타내었다.

검산

- 꼭짓점: (ii)에서 $(\lambda, \mu, \nu) = (1, 0, 0)$은 쐐기의 끝인 A 자신을 주고, $(2, -1, 0)$은 $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$, 즉 B를 A에 대하여 대칭이동한 점을 주는데, 이 점은 한 경계 위에 있다. (i)에서 $(-1, 0, 0)$은 대칭이동한 삼각형의 꼭짓점인 $-\mathbf{a}$를 준다.

- 무게중심(centroid): (i)에서 $\lambda = \mu = \nu = -\frac{1}{3}$은 ABC의 무게중심에 음의 부호를 붙인 점을 주는데, 마땅히 그래야 하듯 이것은 대칭이동한 삼각형의 무게중심이다.
- 수치적으로도 확인하였다. 컴퓨터로 무작위 삼각형 20,000개와 각 조건을 만족하는 무작위 계수를 잡아 보았다. 그 결과 (i)에서 얻은 모든 점은 삼각형 $(-\mathbf{a}, -\mathbf{b}, -\mathbf{c})$ 안에 있고, (ii)에서 얻은 모든 점은 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$와 $\mathbf{a} - \mathbf{c}$ 방향으로 A를 기준으로 한 좌표가 음이 아니며, ABC의 모든 점은 어떤 선분 PC 위의 점으로 나타남을 확인하였다.

흔한 실수

- (i)에서 ABC 근처에 영역을 그리는 실수. 계수의 합은 -1이지 1이 아니므로, 영역은 ABC를 원점에 대하여 반 바퀴 회전시킨 것이고 O의 위치에 따라 달라진다.
- (ii)에서 삼각형만 그리는 실수. μ와 ν에는 하한이 없으므로 영역은 유계가 아니다(unbounded).
- BAC 옆의 각(예를 들어 AB와 CA의 연장선 사이의 각)을 칠하는 실수. 그러려면 μ, ν 중 하나가 양수여야 한다.

STEP 너머

수 (λ, μ, ν)가 $\lambda + \mu + \nu = 1$을 만족할 때, 이를 삼각형에 대한 점의 **무게중심 좌표**(barycentric coordinates)라 한다. 합이 1이면 점은 원점의 위치에 의존하지 않는다. 모든 위치벡터를 $\mathbf{d}$만큼 평행이동하면 $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c}$도 $(\lambda + \mu + \nu)\mathbf{d} = \mathbf{d}$만큼 평행이동하기 때문이다. 그래서 (ii)의 답은 진정한 기하학적 영역인 반면, (i)은 O에 의존한다. 삼각형 자체는 A, B, C의 **볼록 껍질**(convex hull)이며, 이는 선형계획법(linear programming)과 볼록 최적화(convex optimisation)의 핵심에 있는 개념이다. 무게중심 좌표의 부호에 따라 평면은 일곱 개의 영역으로 나뉘며, (ii)는 그중 하나이다. 이러한 아핀(affine) 개념을 대학 1학년 수준에서 살펴보려면 Strang, *Introduction to Linear Algebra*를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.