풀이

STEP I 1987, 문제 8

순수수학 • 치환적분

> **STEP I 1987, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q8

핵심 아이디어

치환(substitution)으로 변수를 바꿀 수 있는 것은 옛 변수가 어떤 구간을 지나갈 때 새 변수도 한 방향으로 매끄럽게 움직이는 경우뿐이다. 여기서 $t = 1/x$는 $x = 0$에서 발산하는데, 이 점은 $[-1, 1]$의 한가운데에 있다. 따라서 "새 적분 끝값" -1과 1은 전혀 다른 t값들의 집합을 나타낸다. 두 피적분함수(integrand)의 부호만 잠깐 살펴봐도 무언가 잘못되었음을 확인할 수 있다.

풀이

치환이 실패하는 이유

형식적으로 $x = 1/t$로 놓으면 $\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$이고

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^2} = \frac{t^4}{(1+t^2)^2}, \qquad \text{따라서} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \frac{-t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t,$$

이며, $x = \pm 1$은 $t = \pm 1$에 대응한다. 두 적분이 같다는 것을 이렇게 "보일" 수 있을 것 같다. 그러나 이는 옳을 수 없다. 첫 번째 피적분함수는 모든 곳에서 양수이므로 첫 번째 적분은 양수이고, 두 번째 피적분함수는 모든 곳에서 ≤ 0이므로 두 번째 적분은 음수이기 때문이다.

> ? **생각해 보기** x가 -1부터 1까지 움직일 때, $t = 1/x$는 실제로 어떤 값들을 가지는가?

x가 -1에서 0^-까지 증가하면 t는 -1에서 $-\infty$까지 감소한다. $x = 0$에서는 대응하는 t가 아예 없다. 그리고 x가 0^+에서 1까지 가면 t는 $+\infty$에서 1까지 내려온다. 따라서 x의 구간 $[-1, 1]$은 $[-1, 1]$ 자체가 아니라 $[-1, 1]$의 **바깥인** $t \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$에 대응한다. 치

환 법칙이 성립하려면 $x = \phi(t)$에서 ϕ가 새 적분 끝값 사이의 t 구간 전체에서 미분가능(differentiable)해야 하는데, $\phi(t) = 1/t$는 $t = 0 \in [-1, 1]$에서 정의조차 되지 않는다. $(-1, 1)$에 속하는 t값들은 $|x| > 1$에 대응하며, 이는 원래 범위 밖에 있다.

각 절반에서 따로따로 올바르게 쓰면, 이 치환으로 예를 들어

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \int_\infty^1 \frac{-t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^\infty \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t,$$

를 얻는다. 이는 참인 명제이지만(아래에서 확인한다), t에 대한 $[-1, 1]$ 위의 적분에 대해서는 아무것도 말해 주지 않는다.

첫 번째 적분

$x = \tan\theta$로 놓으면 $\mathrm{d}x = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$이고 $1 + x^2 = \sec^2\theta$이다. tan는 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$에서 매끄럽고 증가하므로 이 치환은 문제가 없다. 그러면

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} &= \int \frac{\sec^2\theta}{\sec^4\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \int \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{4}\sin 2\theta = \tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \tfrac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)},\end{aligned}$$

이다. 여기서 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\tan\theta\cos^2\theta$를 이용하였다. 따라서

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \left[\tfrac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)}\right]_{-1}^1 = 2\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right) = \boxed{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}}.$$

두 번째 적분

분자를 $-t^2 = 1 - (1+t^2)$로 쓰면

$$\frac{-t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{(1+t^2)^2} - \frac{1}{1+t^2}.$$

앞 부분에 의해 첫 번째 항을 $[-1, 1]$에서 적분하면 $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$이고, $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\arctan t]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}$이다. 따라서

$$\int_{-1}^1 \frac{-t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}},$$

이며, 이는 피적분함수의 부호가 요구하는 대로 음수(≈ -0.285)이다. 반면 첫 번째 적분은 약 1.285이다.

검산

- 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 두 적분을 계산하면 1.2853981…과 −0.2853981…을 얻으며, 이는 $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ 및 $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$와 일치한다.

- 두 답을 더하면 1이다. 여기에는 이유가 있다. $\frac{1}{(1+x^2)^2} - \frac{x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$이고, 이는 $\frac{x}{1+x^2}$의 도함수(derivative)이며, $\left[\frac{x}{1+x^2}\right]_{-1}^{1} = 1$이다.
- 절반 구간에 대한 올바른 명제도 맞아떨어진다. $\int_1^\infty \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$.

흔한 실수

- x의 범위 $[-1,1]$이 $|t| \geq 1$에 대응한다는 설명 없이 "$1/t$는 $t = 0$에서 정의되지 않는다"라고만 말하는 것. 진짜 요점은 두 적분이 서로 다른 값들의 집합을 다룬다는 것이다.
- $\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$의 부호를 틀리는 것. 그러면 결정적 단서인 부호 모순이 가려진다.
- $\cos^2\theta$를 적분할 때 $\frac{1}{4}\sin 2\theta$ 항을 빠뜨리는 것.

STEP 너머

치환 법칙 $\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$는 대학의 첫 해석학(analysis) 강의에서 연쇄법칙(chain rule)과 미적분학의 기본정리(Fundamental Theorem of Calculus)로부터 증명되며, 그 증명은 무엇이 필요한지 정확히 보여 준다. 바로 ϕ가 $[a,b]$ 전체에서 연속미분가능(continuously differentiable)해야 한다는 것이다. 여기서는 그 조건이 한 점에서 깨지는데, 그 한 점만으로도 결과가 무너지기에 충분하다. Abbott의 *Understanding Analysis*는 리만 적분(Riemann integral)과 이 정리들을 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.