풀이

STEP I 1987, 문제 7

순수수학 • 삼각급수

> **STEP I 1987, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q7

핵심 아이디어

두 급수(series) 모두 각이 일정한 간격으로 커지는 사인들의 합이다. $\sin((2k+1)\theta)$ 꼴의 항에 $2\sin\theta$나 $2\cos\theta$를 곱하면 곱을 합으로 바꾸는 공식(product-to-sum formula)에 의해 이웃한 두 항의 **차** 또는 **합**이 되므로, 급수 전체가 연쇄적으로 소거(telescoping)된다. 유일한 선택은 어떤 인수를 곱하느냐이다. 그냥 더하는 합에는 $2\sin\theta$가 알맞고, 부호가 번갈아 바뀌는 합에는 $2\cos\theta$가 알맞다.

풀이

준비

$\theta = \dfrac{2\pi}{23}$이라 하자. 각은 $2\pi/23,\ 6\pi/23,\ 10\pi/23, \ldots, 42\pi/23$이고 매번 $4\pi/23 = 2\theta$씩 커지므로, $21\theta = 42\pi/23$에서 각은

$$(2k+1)\theta \qquad \text{단, } k = 0, 1, \ldots, 10,$$

이다. 따라서 항은 11개이고, 교대급수(alternating series)에서 k번째 항의 부호는 $(-1)^k$이다(마지막 항 $k=10$은 마땅히 $+$이다). 그러므로 구하려는 것은

$$S_1 = \sum_{k=0}^{10} \sin((2k+1)\theta), \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{10} (-1)^k \sin((2k+1)\theta).$$

이다. $22\theta = \dfrac{44\pi}{23} = 2\pi - \dfrac{2\pi}{23}$을 이용할 것인데, 이로부터

$$\cos 22\theta = \cos\theta, \qquad \sin 22\theta = -\sin\theta.$$

이다.

첫 번째 급수

곱을 합으로 바꾸는 공식 $2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$에 의해

$$2\sin\theta\,\sin((2k+1)\theta) = \cos(2k\theta) - \cos((2k+2)\theta).$$

이다. $k = 0, \ldots, 10$에 대해 더하면, $1 \le k \le 10$인 각 $\cos(2k\theta)$는 양의 부호와 음의 부호로 한 번씩 나타나 소거되고, 남는 것은

$$2\sin\theta\, S_1 = \cos 0 - \cos 22\theta = 1 - \cos\theta.$$

이다. $0 < \theta < \pi$이므로 $\sin\theta \neq 0$이고, 따라서 나눌 수 있다.

$$S_1 = \frac{1-\cos\theta}{2\sin\theta} = \frac{2\sin^2(\theta/2)}{4\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)} = \tfrac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2},$$

여기서 $1-\cos\theta = 2\sin^2(\theta/2)$와 $\sin\theta = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$를 이용하고 $\sin(\theta/2) \neq 0$을 약분하였다. $\theta/2 = \pi/23$이므로

$$\boxed{\sin\tfrac{2\pi}{23} + \sin\tfrac{6\pi}{23} + \cdots + \sin\tfrac{42\pi}{23} = \tfrac{1}{2}\tan\tfrac{\pi}{23}.}$$

? **생각해 보기** 교대급수에서는 왜 다시 $2\sin\theta$를 곱하지 않고 $2\cos\theta$를 곱하는가?

$2\sin\theta$를 곱하면 차 $\cos(2k\theta) - \cos((2k+2)\theta)$가 나오는데, 번갈아 바뀌는 부호 때문에 이웃한 항들이 소거되지 않고 오히려 **더해진다**. $2\cos\theta$를 곱하면 **합** $\sin((2k+2)\theta) + \sin(2k\theta)$가 나오고, 이번에는 번갈아 바뀌는 부호가 바로 소거를 일으킨다.

두 번째 급수

$2\cos A\sin B = \sin(B+A) + \sin(B-A)$에 의해

$$2\cos\theta\,\sin((2k+1)\theta) = \sin((2k+2)\theta) + \sin(2k\theta).$$

이다. 여기에 $(-1)^k$를 곱하여 더한다. $1 \le k \le 10$일 때 $\sin(2k\theta)$는 $k-1$번째 항에서 부호 $(-1)^{k-1}$로, k번째 항에서 부호 $(-1)^k$로 나타나므로 소거된다. 남는 것은 $k = 0$에서 나온 $\sin 0$과 $k = 10$에서 나온 $(-1)^{10}\sin 22\theta$뿐이다.

$$2\cos\theta\, S_2 = \sin 22\theta = -\sin\theta.$$

$0 < \theta < \pi/2$이므로 $\cos\theta \neq 0$이고, 따라서

$$S_2 = -\frac{\sin\theta}{2\cos\theta} = -\tfrac{1}{2}\tan\theta,$$

즉

$$\boxed{\sin\tfrac{2\pi}{23} - \sin\tfrac{6\pi}{23} + \cdots - \sin\tfrac{38\pi}{23} + \sin\tfrac{42\pi}{23} = -\tfrac{1}{2}\tan\tfrac{2\pi}{23}.}$$

이다. 양수처럼 보이는 꼴을 원한다면, $\tan(\pi - x) = -\tan x$이므로 이 값은 $\frac{1}{2}\tan\frac{21\pi}{23}$이기도 하다.

검산

- 수치로 계산하면 $\frac{1}{2}\tan(\pi/23) \approx 0.068723$, $-\frac{1}{2}\tan(2\pi/23) \approx -0.140093$이고, 열한 개의 항을 직접 더해도 유효숫자 15자리까지 같은 값이 나온다.
- 두 번째 답이 음수라는 것은 납득할 만하다. 부분합(partial sum)은 대략 ± 0.5 사이를 오가며, 마지막으로 더하는 항 $\sin(42\pi/23) \approx -0.27$ 자체가 음수이다.
- 같은 방법으로 일반 공식 $\sum_{k=0}^{n-1}\sin((2k+1)\theta) = \dfrac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta}$와 $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\sin((2k+1)\theta) = (-1)^{n-1}\dfrac{\sin 2n\theta}{2\cos\theta}$를 얻는다. $n=1$을 대입해 보면 둘 다 $\sin\theta$가 된다.

흔한 실수

- 항의 개수를 잘못 세는 것. 각은 $2\pi/23$이 아니라 $4\pi/23$씩 커지므로 항은 21개가 아니라 11개이다.
- 두 답이 모두 양수일 것이라고 기대하는 것. π보다 큰 각의 사인은 음수이며, 음의 부호는 $\sin(44\pi/23) = -\sin(2\pi/23)$에서 나온다.

STEP 너머

이 합들은 등비급수(geometric series)의 허수부(imaginary part)이다. $S_1 = \operatorname{Im}\sum e^{i(2k+1)\theta}$이고, S_2는 공비가 $-e^{2i\theta}$인 같은 꼴의 급수의 허수부이므로, 이로부터 두 답에 이르는 또 다른 길을 얻는다. 디리클레 핵(Dirichlet kernel)과 같은 이런 종류의 합은 함수를 사인과 코사인으로 쌓아 올리는 푸리에 해석(Fourier analysis)의 출발점이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*는 회전하는 벡터의 그림을 이용하여 이러한 합이 왜 그렇게 행동하는지 보여 준다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.