풀이

STEP I 1987, 문제 6

순수수학 • 넓이와 역함수

> **STEP I 1987, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q6

핵심 아이디어

$\mathrm{F}(s)$는 곡선 **아래**, 곧 곡선과 x축 사이의 넓이이고, $\mathrm{G}(t)$는 곡선 **왼쪽**, 곧 곡선과 y축 사이의 넓이이다. 두 영역을 한 그림에 함께 그리면 두 영역은 꼭짓점이 $(0,0)$과 (s,t)인 직사각형을 함께 덮는데, 꼭짓점 (s,t)가 곡선 위에 정확히 놓이지 않는 한 남는 부분이 생긴다. 두 번째 부분에서는 바로 그렇게 되도록 s를 고르고, 그러면 어려운 적분 $\int \sin^{-1} y \,\mathrm{d}y$가 쉬운 적분 $\int \sin x \,\mathrm{d}x$로부터 저절로 얻어진다.

풀이

부등식 $(*)$

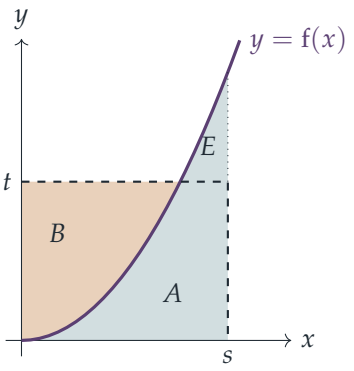
먼저 f에 관한 사실 하나를 살펴본다. 이 함수는 연속(continuous)이고 각 값을 많아야 한 번만 가지므로 강단조(strictly monotonic)이다(증가하다가 감소하는 연속함수는 중간값 정리(intermediate value theorem)에 의해 어떤 값을 두 번 가지게 된다). $\mathrm{f}(0) = 0$이고 $\mathrm{f}(x) \geq 0$이므로 이 함수는 강한 의미로 **증가**해야 한다. 따라서 g도 증가하며, $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq \mathrm{f}(a)$에 대하여 다음이 성립한다.

$$y \leq \mathrm{f}(x) \iff \mathrm{g}(y) \leq x.$$

두 영역을 다음과 같이 정의한다.

$$A = \{(x,y) : 0 \leq x \leq s,\ 0 \leq y \leq \mathrm{f}(x)\}, \qquad \text{넓이} \mathrm{F}(s),$$
$$B = \{(x,y) : 0 \leq y \leq t,\ 0 \leq x \leq \mathrm{g}(y)\}, \qquad \text{넓이} \mathrm{G}(t),$$

또 R을 직사각형 $0 \leq x \leq s, 0 \leq y \leq t$라 하면 그 넓이는 st이다. B의 넓이가 $\mathrm{G}(t)$인 까닭은 길이가 $\mathrm{g}(y)$인 가로 띠들을 적분하기 때문이다("y에 대한 넓이").



R의 모든 점은 A 또는 B에 속한다. $(x, y) \in R$이면 $y \le \mathrm{f}(x)$이어서 그 점이 A에 속하거나, $y > \mathrm{f}(x)$인데 이는 $x < \mathrm{g}(y)$를 뜻하므로 그 점이 B에 속한다. 겹치는 부분 $A \cap B$는 곡선의 호 자체일 뿐이므로 넓이가 없다. 따라서

$$\mathrm{F}(s) + \mathrm{G}(t) = \text{넓이}(A) + \text{넓이}(B) \ge \text{넓이}(A \cup B) \ge \text{넓이}(R) = st,$$

이고, 이것이 바로 $(*)$이다.

생각해 보기 직사각형 안에 있지 않은데 세어진 것은 정확히 무엇인가?

초과분은 $A \cup B$ 가운데 R 밖으로 튀어나온 부분 E이다. (그림처럼) $t < \mathrm{f}(s)$이면 B는 R 안에 머물지만, A는 $y = t$ 위로 영역 $\mathrm{g}(t) < x \le s, t < y \le \mathrm{f}(x)$만큼 튀어나온다. 모든 $x > \mathrm{g}(t)$에 대하여 $\mathrm{f}(x) > t$이고 f가 연속이므로 이 영역의 넓이는 양수이며, 따라서 부등식은 엄격한 부등식(strict inequality)이 된다. $t > \mathrm{f}(s)$이면 역할을 바꾸어 같은 일이 일어난다. 즉 B가 $x = s$의 오른쪽으로 튀어나온다. $t = \mathrm{f}(s)$이면 꼭짓점 (s, t)는 곡선 위에 있고, $A \cup B$는 정확히 R이 되어 초과분이 없다.

그러므로 $(*)$**에서 등호가 성립할 필요충분조건은** $t = \mathrm{f}(s)$**이다**. 즉 (s, t)가 곡선 위에 있을 때이다.

$\sin^{-1} y$의 적분

$[0, \frac{1}{2}\pi]$에서 $\mathrm{f}(x) = \sin x$로 잡자. 이 함수는 연속이고 증가하며 원점을 지나고 제1사분면(first quadrant)에 머무르므로, $a = \frac{1}{2}\pi, \mathrm{f}(a) = 1, \mathrm{g}(y) = \sin^{-1} y$로 두면 위의 내용이 모두 적용된다.

$t \in [0, 1]$이 주어졌을 때 $s = \sin^{-1} t$로 고르면, 이 값은 $[0, \frac{1}{2}\pi]$에 속한다. 그러면 $t = \sin s = \mathrm{f}(s)$이므로 $(*)$에서 등호가 성립한다.

$$\int_0^t \sin^{-1} y \, \mathrm{d}y = \mathrm{G}(t) = st - \mathrm{F}(s).$$

이제 쉬운 적분을 계산한다.

$$\mathrm{F}(s) = \int_0^s \sin x \,\mathrm{d}x = 1 - \cos s.$$

$s = \sin^{-1} t$를 대입하면

$$\int_0^t \sin^{-1} y \,\mathrm{d}y = t \sin^{-1} t - (1 - \cos(\sin^{-1} t)),$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

미분으로 확인하기

$\sin^{-1} t \in [0, \frac{1}{2}\pi]$이므로 그 코사인 값은 음이 아니고, 따라서 $\cos(\sin^{-1} t) = \sqrt{1-t^2}$이다. 그러므로 우변은 $t \sin^{-1} t - 1 + \sqrt{1-t^2}$이다. $0 \le t < 1$에 대하여 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sin^{-1} t = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$와 곱의 미분법(product rule)을 쓰면

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t \sin^{-1} t - 1 + \sqrt{1-t^2}\right) &= \sin^{-1} t + \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \sin^{-1} t,\end{aligned}$$

이고, 이는 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)에 의해 좌변의 도함수와 같다. 양변은 $t = 0$에서 모두 0이므로 $[0, 1)$에서 일치하고, 연속성에 의해 $t = 1$에서도 일치한다.

검산

- $t = 1$일 때: 공식은 $\frac{1}{2}\pi - 1 \approx 0.5708$을 준다. 기하적으로 보면, 높이 1까지 $y = \sin x$의 왼쪽 넓이는 직사각형 $\frac{1}{2}\pi \times 1$에서 아치 아래의 넓이 1을 뺀 것이다. $[0, 1]$에서 $\sin^{-1} y$를 수치적분(numerical integration)하면 0.57080이 나온다.
- $t = \frac{1}{2}$일 때: 공식은 $\frac{\pi}{12} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.12782$를 주며, 이는 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 구한 값과 일치한다.
- $(*)$에 대해서는 $\mathrm{f}(x) = x^2$, $s = 1$, $t = 4$로 해 보자. $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \frac{1}{3} + \frac{16}{3} = \frac{17}{3} > 4$이고, $t = 1 = \mathrm{f}(1)$로 두면 $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 = st$를 얻는다.

흔한 실수

- 부호를 정하지 않고 $\cos(\sin^{-1} t) = \pm\sqrt{1-t^2}$라고 쓰는 것: $\sin^{-1}$의 치역 때문에 양수이다.

- $t \neq \mathrm{f}(s)$일 때 부등식이 왜 엄격한지 설명하지 않고 "영역들이 직사각형을 덮는다"고만 말하는 것: 등호 조건을 묻는 부분에는 그 설명이 필요하다.
- f가 증가해야 한다는 사실을 잊는 것: 그림은 이 사실에 기대고 있다.

STEP 너머

부등식 $(*)$는 **영의 부등식**(Young's inequality)이다. $\mathrm{f}(x) = x^{p-1}$로 두면 이 부등식은 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$일 때 $st \leq \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q}$가 되는데, 이는 해석학의 주력 도구 가운데 하나인 횔더(Hölder) 부등식을 증명하는 핵심 단계이다. F와 G의 짝짓기는 라그랑주 역학과 해밀턴 역학을 잇는 르장드르 변환(Legendre transform)을 처음으로 엿보는 것이다. 이 모든 것의 바탕에 있는 해석학을 더 알고 싶다면 Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)를 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.