풀이

STEP I 1987, 문제 5

순수수학 • 치환적분

> **STEP I 1987, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q5

핵심 아이디어

이 치환(substitution)은 제곱근 안의 두 인수가 모두 완전제곱식이 되도록 고안된 것이다. 즉 $x-\alpha$는 $\sin^2\theta$의 상수배가 되고, $\beta-x$는 같은 상수배의 $\cos^2\theta$가 된다. 그러면 제곱근이 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta$와 정확히 약분되어, 첫 번째 적분은 피적분함수(integrand)가 상수인 적분으로 줄어든다. 두 번째 적분에는 $1/x$라는 인수가 하나 더 남는데, 분자와 분모를 $\cos^2\theta$로 나누면 이것은 $\tan\theta$에 관한 표준적인 적분이 된다.

풀이

$\alpha<\beta$일 때의 첫 번째 적분

$x=\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta$로 놓는다. $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$을 이용하면

$$x-\alpha=\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta-\alpha(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=(\beta-\alpha)\sin^2\theta,$$
$$\beta-x=\beta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-\alpha\cos^2\theta-\beta\sin^2\theta=(\beta-\alpha)\cos^2\theta,$$

이고

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=-2\alpha\cos\theta\sin\theta+2\beta\sin\theta\cos\theta=2(\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta.$$

이다. 적분 구간의 끝을 보면, $\theta=0$일 때 $x=\alpha$이고 $\theta=\frac{\pi}{2}$일 때 $x=\beta$이다. $(0,\frac{\pi}{2})$에서 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta>0$이므로, θ가 $[0,\frac{\pi}{2}]$를 움직일 때 x는 $[\alpha,\beta]$를 증가하면서 한 번 지나간다.

이 범위에서 $\sin\theta\geq 0$, $\cos\theta\geq 0$이고 $\beta-\alpha>0$이므로

$$\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2\sin^2\theta\cos^2\theta}=(\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta.$$

이다. 따라서

$$\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{2(\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta}{(\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} 2\,\mathrm{d}\theta = \pi,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. (피적분함수가 양 끝에서 발산하므로, 엄밀히 말하면 이것은 이상적분(improper integral)이다. 치환한 뒤의 피적분함수가 유계인 상수 2이므로, 이 치환을 통해 적분이 수렴(converge)함을 알 수 있다.)

? **생각해 보기** $\alpha < \beta$라는 조건은 정확히 어디에서 사용했는가?

제곱근을 계산할 때뿐이다. $\sqrt{(\beta-\alpha)^2}$가 $\beta-\alpha$와 같은 것은 바로 $\beta-\alpha>0$이기 때문이다. 일반적으로는 이 값이 $|\beta-\alpha|$이며, 이것이 다음 소문항의 핵심이다.

$\alpha > \beta$일 때의 첫 번째 적분

이번에는 적분이 큰 수 α에서 작은 수 β로 내려가며 진행된다. 두 수 사이의 구간에서 $x-\alpha<0$이고 $\beta-x<0$이므로, 곱은 여전히 양수이고 피적분함수도 여전히 의미가 있다.

치환은 앞과 똑같이 진행되지만, 이번에는 $\sqrt{(\beta-\alpha)^2} = \alpha-\beta$이므로

$$\frac{2(\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta}{(\alpha-\beta)\sin\theta\cos\theta} = -2,$$

이고, 적분값은

$$\int_0^{\pi/2} (-2)\,\mathrm{d}\theta = -\pi.$$

이다. 이것을 더 빨리 확인하는 방법도 있다. 식 $(x-\alpha)(\beta-x)$는 α와 β를 서로 바꾸어도 변하지 않으므로, 피적분함수는 두 문자의 역할을 바꾼 첫 번째 경우와 같은 함수이다. 적분구간의 위끝과 아래끝을 바꾸면 부호가 바뀌므로, β를 작은 쪽 끝점으로 하여 첫 번째 결과를 이용하면

$$\int_\alpha^\beta = -\int_\beta^\alpha = -\pi,$$

이다.

$0 < \alpha < \beta$일 때의 두 번째 적분

똑같은 치환을 하면 똑같이 약분되어 $1/x$라는 인수만 남는다.

$$\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{2\,\mathrm{d}\theta}{\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta}.$$

$\alpha,\beta>0$이므로 분모는 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 전체에서 양수이고, 따라서 이것은 보통의 정적분이다. 이 값을 구하기 위해 분자와 분모를 $\cos^2\theta$로 나눈다($0\le\theta<\frac{\pi}{2}$에서 가능하다).

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta}{\alpha+\beta\tan^2\theta}.$$

이제 $t = \tan\theta$로 놓으면 $\mathrm{d}t = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$이고, θ가 0에서 $\frac{\pi}{2}$까지 움직일 때 t는 0에서 ∞까지 움직인다.

$$\int_0^\infty \frac{2\,\mathrm{d}t}{\alpha+\beta t^2} = \frac{2}{\beta}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\alpha/\beta} = \frac{2}{\beta}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\left[\arctan\left(t\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)\right]_0^\infty$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha\beta}},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. $\alpha > 0$이라는 조건은 두 번 필요했다. 하나는 $[\alpha, \beta]$ 안에서 $1/x$가 특이점(singularity)을 갖지 않도록 하기 위해서이고, 다른 하나는 $\sqrt{\beta/\alpha}$가 실수가 되도록 하기 위해서이다.

? 생각해 보기 위끝이 ∞가 되었다. 이것이 문제가 되는가?

그렇지 않다. θ에 관한 적분은 지극히 평범한 적분이며, 무한대 끝은 $\theta \to \frac{\pi}{2}$일 때 $\tan\theta \to \infty$이기 때문에 나타날 뿐이다. arctan이 $\frac{\pi}{2}$로 수렴하므로 t에 관한 적분은 수렴하고, $\Theta \to \frac{\pi}{2}$일 때 $[0, \Theta]$에서의 적분의 극한으로서 θ에 관한 적분과 같다.

검산

- 척도 변환(scaling): x, α, β를 kx, $k\alpha$, $k\beta$로 바꾸면 첫 번째 적분은 변하지 않고 두 번째 적분은 k로 나누어진다. 두 답 π와 $\pi/\sqrt{\alpha\beta}$는 모두 이렇게 변한다.
- $\alpha \to \beta$로 보내 보자. 그러면 (아주 작은) 구간 전체에서 $1/x \approx 1/\beta$이므로 두 번째 적분은 약 π/β가 되어야 하는데, 실제로 $\pi/\sqrt{\alpha\beta} \to \pi/\beta$이다.
- 수치적으로, $\alpha = 2$, $\beta = 7$일 때 수치 적분(quadrature)으로 두 번째 적분을 계산하면 0.83963이 나오며, 이는 $\pi/\sqrt{14} = 0.83963$과 일치한다. $\alpha < \beta$를 임의로 골라 계산해 보면 첫 번째 적분은 모두 π가 나왔고, 끝점을 서로 바꾸면 $-\pi$가 나왔다.

흔한 실수

- $\alpha > \beta$일 때도 답을 π라고 쓰는 것. 피적분함수는 양수이지만 적분 구간이 거꾸로 진행되므로 답은 $-\pi$이다.
- 세 인수의 부호를 확인하지 않고 $\sqrt{(\beta-\alpha)^2\sin^2\theta\cos^2\theta} = (\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta$라고 쓰는 것.

STEP 너머

이 치환에는 깔끔한 기하학적 의미가 있다. $x = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\beta-\alpha}{2}\cos 2\theta$이므로, 이 치환은 $[\alpha, \beta]$를 지름으로 하는 반원을 매개화(parametrise)하며, $\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}$는 x 위에서 그 반원의 높이이다. 두 번째 적분은 경로 적분(contour integration)으로 적분을 계산하는 방법을 처음 맛보게 해 준다. 복소해석학(complex analysis)에서는 두 결과 모두 유수 정리(residue theorem)로부터 몇 줄 만에 얻어진다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)가 이를 훌륭하게 설명하며, 이상적분에 대한 엄밀한 논의는 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)에 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.