풀이

STEP I 1987, 문제 4

순수수학 • 로그와 등비급수

> **STEP I 1987, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q4

핵심 아이디어

다루기 까다로운 밑(base)의 로그(logarithm)는 자연로그(natural logarithm)로 바꾸는 것이 가장 좋다. 그러면 밑이 단순한 인수로 나타나기 때문이다. 여기서 모든 밑은 2의 거듭제곱이고, 지수(exponent) 2^n은 곱해지는 수로 내려온다. 각 항을 $\ln 2$로 나타내고 나면, 이 급수는 모습만 바꾼 등비급수(geometric series)일 뿐이다.

풀이

일반항 다시 쓰기

$n \geq 0$을 고정하고 $c = \log_{2^{2^n}} \mathrm{e}$라 하자. 힌트에 주어진 정의에 따라 이는

$$(2^{2^n})^c = \mathrm{e}$$

를 뜻한다. 양변에 자연로그를 취하면(양변 모두 양수이다)

$$c \cdot 2^n \ln 2 = \ln \mathrm{e} = 1, \qquad \text{따라서} \qquad \log_{2^{2^n}} \mathrm{e} = \frac{1}{2^n \ln 2}.$$

첨자가 맞는지 확인해 보면, $n = 0, 1, 2$일 때 밑은 $2, 4, 16$으로 처음 세 항과 일치하고, 그 값은 $\frac{1}{\ln 2}$, $\frac{1}{2\ln 2}$, $\frac{1}{4\ln 2}$이다.

> **생각해 보기** 2^n은 어디에서 나왔는가?

$a = 2$, $k = 2^n$으로 놓고 법칙 $\ln(a^k) = k \ln a$를 쓰면 나온다. 즉 밑 2^{2^n}의 자연로그는 $2^n \ln 2$이다. 지수가 "탑"처럼 쌓여 있기 때문에 각 밑은 바로 앞 밑의 **제곱**이 되고, 밑을 제곱하면 로그는 절반이 된다.

급수의 합 구하기

따라서 급수는

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \log_{2^{2^n}} \mathrm{e} = \frac{1}{\ln 2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

이다. 이것은 첫째항이 1이고 공비(common ratio)가 $r = -\frac{1}{2}$인 등비급수이다. $|r| < 1$이므로 이 급수는 수렴(converge)하며, 그 합은 $\frac{1}{1-r} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$이다. 그러므로

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \log_{2^{2^n}} \mathrm{e} = \frac{2}{3\ln 2} = \frac{1}{\frac{3}{2}\ln 2} = \frac{1}{\ln(2^{3/2})} = \frac{1}{\ln(2\sqrt{2})}$$

이다. 여기서 다시 $\ln(a^k) = k\ln a$를 썼고, $2^{3/2} = 2\cdot 2^{1/2} = 2\sqrt{2}$를 이용했다. 이것이 구하는 합이다.

검산

수치로 보면 $\frac{1}{\ln(2\sqrt{2})} \approx 0.96180$이다. 급수의 부분합(partial sum)은 1.4427, 0.7213, 1.0820, 0.9017, 0.9919, 0.9468, …로, 교대(alternating) 등비급수답게 이 값의 양쪽을 오가며 그 차이가 매번 절반으로 줄어든다. 6o개 항까지 더하면 기계 정밀도 안에서 0.961797과 일치한다.

흔한 실수

- $\log_{2^{2^n}}$을 $\log_{2^{2n}}$으로 읽는 실수: 이렇게 하면 밑이 2, 16, 256, …가 되어 틀린 공비 $-\frac{1}{4}$를 얻는다. 처음 몇 항과 비교하여 첨자를 확인하라.
- $\frac{1}{\ln a}$ 대신 $\log_a \mathrm{e} = \ln a$로 쓰는 실수. 밑변환 공식(change-of-base rule)에 따르면 $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$이고, 여기서는 $\ln b = 1$이다.

STEP 너머

무한합이 애초에 "값을 갖는가"는 해석학(analysis) 첫 강좌의 핵심 질문이다. 등비급수는 기본적인 기준이 된다. 비판정법(ratio test)을 비롯한 많은 수렴 판정법은 급수를 등비급수와 비교하는 방식으로 작동한다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이 이론을 꼼꼼하면서도 읽기 쉽게 쌓아 올린다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.