풀이

STEP I 1987, 문제 3

순수수학 • 변수분리형 미분방정식

> **STEP I 1987, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q3

핵심 아이디어

v에 대한 이 방정식은 보기에 까다롭지만, 좌변은 알아봐 달라고 외치고 있다. $x^3v' + x^2v$는 x^2에 xv의 도함수(derivative)를 곱한 것이다. 따라서 제시된 치환(substitution)은 좌변을 x^2y'로 바꾸고, y로 다시 쓴 우변은 깔끔하게 변수분리(separation of variables)된다. 그 다음은 부분분수(partial fractions)와 부호를 신중하게 고르는 일만 남는다.

풀이

변수 바꾸기

$y = xv$로 두면 곱의 미분법(product rule)에 의해 $y' = v + xv'$이므로

$$x^3\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + x^2v = x^2\left(x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\right) = x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

우변에서 $x^2v^2 = y^2$이고 $v = y/x$이므로 우변은

$$\frac{1+y^2}{(1+x^2)\,y/x} = \frac{x(1+y^2)}{(1+x^2)\,y}.$$

방정식은 다음과 같이 된다.

$$x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x(1+y^2)}{(1+x^2)\,y}, \qquad \text{즉,} \qquad \frac{y}{1+y^2}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x(1+x^2)},$$

여기서 x^3으로 나누고($x = 1$ 근처에서 다루므로 $x > 0$이다) $y/(1+y^2)$을 곱했다. 변수가 분리되었다.

적분하기

좌변을 적분하면 $\frac{1}{2}\ln(1+y^2)$이 된다. 우변은 부분분수로 분해하면

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2},$$

이고, 이는 우변을 통분해 보면 쉽게 확인할 수 있다. 따라서 $x > 0$일 때

$$\tfrac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln x - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C, \qquad \text{따라서} \qquad 1+y^2 = \frac{Ax^2}{1+x^2}$$

이며, 여기서 $A = \mathrm{e}^{2C}$는 양의 상수이다.

$x = 1$일 때 $v = 1$이므로 $y = 1$이기도 하고, 따라서 $2 = A/2$, 즉 $A = 4$이다. 그러므로

$$y^2 = \frac{4x^2}{1+x^2} - 1 = \frac{3x^2-1}{1+x^2}, \qquad v^2 = \frac{y^2}{x^2} = \frac{3x^2-1}{x^2(1+x^2)}.$$

생각해 보기 어느 쪽 제곱근을 택해야 하며, 해는 어디에서 유효한가?

원래 방정식은 분모에 v가 있으므로 해는 결코 $v = 0$을 지날 수 없다. 해는 연속이므로 $x = 1$에서의 부호, 즉 양의 부호를 계속 유지한다. 따라서 양의 제곱근을 택한다.

$$\boxed{v(x) = \frac{\sqrt{3x^2-1}}{x\sqrt{1+x^2}}}$$

이 해는 $x > 1/\sqrt{3}$에서 유효하다. x가 $1/\sqrt{3}$까지 감소하면 v는 0으로 떨어지고 방정식이 성립하지 않게 되므로, 해를 그 점 아래로 연장할 수 없다.

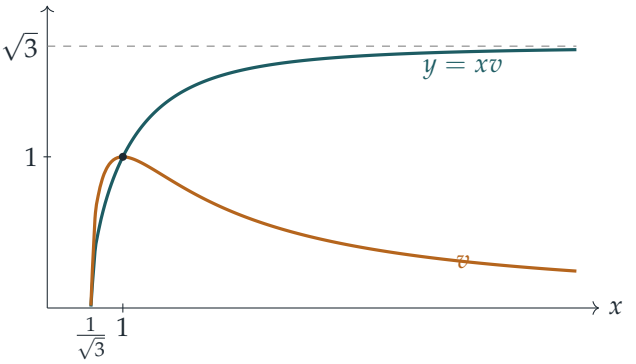
x가 클 때

분자와 분모를 x^2으로 나누면

$$v(x) = \frac{1}{x}\cdot\frac{\sqrt{3-1/x^2}}{\sqrt{1+1/x^2}} \approx \frac{\sqrt{3}}{x},$$

이므로 $x \to \infty$일 때 $v(x) \to 0$이다. 같은 말로, $y = xv \to \sqrt{3}$이다. 즉 y의 그래프는 수평 점근선(horizontal asymptote) $y = \sqrt{3}$을 가지며, $v = y/x$는 $\sqrt{3}/x$처럼 감소한다.

사실 출발점이 최고점이다. $u = x^2$으로 두면 $(3u-1)/(u^2+u)$의 도함수의 분자는 $-(3u+1)(u-1)$이므로, v는 $x = 1$에서 최댓값 1까지 증가한 뒤 0을 향해 감소한다.



검산

- $x = 1$에서: $v = \sqrt{2}/(1 \cdot \sqrt{2}) = 1$로, 조건을 만족한다.
- 다시 대입하기: $1 + y^2 = 4x^2/(1 + x^2)$에서 음함수 미분(implicit differentiation)을 하면 $2yy' = 8x/(1 + x^2)^2$이고, $(1 + y^2)/(x(1 + x^2)) = 4x/(1 + x^2)^2$이므로 마땅히 $yy'/(1 + y^2) = 1/(x(1 + x^2))$이 성립한다.
- 수치적으로, 원래 방정식을 $(1, 1)$에서부터 룽게-쿠타 방법(Runge–Kutta method)으로 단계별로 풀면 $v(10) \approx 0.172058$을 얻어 공식과 일치하고, $x = 10^4$에서 공식은 $xv \approx 1.73205 \approx \sqrt{3}$을 준다.

흔한 실수

- 극한(limit)의 답으로 $\sqrt{3}$이라고 쓰는 것: 그것은 y의 극한이지만, 문제는 v에 대해 묻고 있으며, 이는 0으로 수렴한다.
- 상수를 지수로 올릴 때 잘못하는 것: $\ln(1 + y^2) = \ln \frac{x^2}{1+x^2} + 2C$에서 얻는 것은 곱해지는 상수가 있는 $1 + y^2 = Ax^2/(1 + x^2)$이지, $x^2/(1 + x^2) + 2C$가 아니다.
- 제곱근에서 $\pm$를 정하지 않고 두는 것: 조건 $v(1) = 1$과 $v = 0$이 될 수 없다는 제약이 양의 부호를 결정한다.

STEP 너머

여기서 치환이 통하는 이유는 양변에 곱한 뒤 좌변이 완전미분(exact derivative)이 되기 때문이며, 이는 적분인자(integrating factor)와 동차방정식(homogeneous equation) 뒤에 있는 것과 같은 아이디어이다. 부호와 정의역(domain)에 대해 기울여야 했던 주의는 존재

성과 유일성 이론(existence and uniqueness theory)을 처음 엿보는 것이다. 주어진 점을 지나는 해는 방정식이 의미를 잃는 곳, 여기서는 $v = 0$에 닿을 때까지 존재한다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 변수분리형 방정식과 해가 어디까지 연장되는지의 문제를 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.