풀이

STEP I 1987, 문제 2

순수수학 • 원 채우기의 넓이

> **STEP I 1987, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q2

핵심 아이디어

작은 원들의 중심을 이어 보자. 중심들은 모두 두 큰 원의 한가운데에 있는 반지름 R인 원 위에 놓이며 정n각형(regular polygon)을 이룬다. 이 다각형의 변은 이웃한 작은 원들이 접하는 점을 지난다. 이 다각형이 바로 Y라 부르는 부분(다각형 안쪽)과 X라 부르는 부분(다각형 바깥쪽)을 가르는 경계선이다. 따라서 모든 넓이는 세 가지 간단한 도형, 즉 다각형, 원판(disc), 그리고 다각형의 꼭짓점이 잘라 내는 작은 원의 부채꼴(sector)로 구할 수 있다.

풀이

n, R, r 사이의 관계

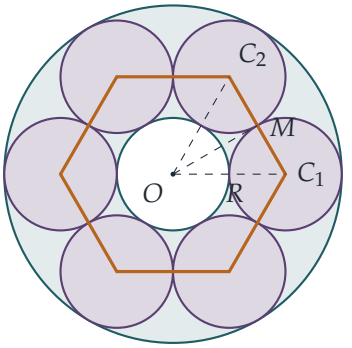
각 작은 원은 두 큰 원에 모두 접하므로, 그 중심은 공통 중심 O로부터 거리 $R - r + r = R$만큼 떨어져 있다. 즉 n개의 중심은 모두 반지름 R인 원 위에 있다. 대칭성에 의해 중심들은 같은 간격으로 놓이므로, 이웃한 중심 C_1, C_2가 O에서 이루는 각은 $2\pi/n$이다.

이웃한 두 원이 서로 접하므로 $C_1C_2 = 2r$이다. $OC_1 = OC_2 = R$인 이등변삼각형(isosceles triangle) OC_1C_2에서 O로부터 C_1C_2의 중점 M에 수선을 내리면 다음을 얻는다.

$$r = C_1M = R\sin\frac{\pi}{n}.$$

이것이 구하는 관계식이다. ($n \geq 3$이어야 한다. $n = 2$이면 안쪽 원의 반지름이 $R - r = 0$이 되기 때문이다.) 같은 삼각형에서 다음도 얻는다.

$$OM = R\cos\frac{\pi}{n} = \sqrt{R^2 - r^2}.$$



그림($n = 6$인 경우)에서 중심들이 이루는 다각형을 호박색으로 나타냈다. 이 다각형의 변은 M처럼 이웃한 원들의 접점을 지난다.

넓이 Y

다각형은 OC_1C_2와 합동인 삼각형 n개로 이루어지고, 각 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sqrt{R^2 - r^2}$이다. 따라서

$$\text{다각형의 넓이} = nr\sqrt{R^2 - r^2}.$$

다각형 안에는 무엇이 있을까? 다각형의 내접원 반지름(inradius)은 $OM = \sqrt{R^2 - r^2}$이고, $R^2 - r^2 \geq (R - r)^2$이다. 이 부등식을 정리하면 $2r(R - r) \geq 0$이 되기 때문이다. 따라서 반지름 $R - r$인 안쪽 원판은 다각형 안에 들어 있다. 각 꼭짓점에는 작은 원의 부채꼴이 하나씩 있다. 정n각형의 내각(interior angle)은 $\pi - \frac{2\pi}{n}$이므로 각 부채꼴의 넓이는 다음과 같다.

$$\tfrac{1}{2}r^2\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right) = \pi r^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right).$$

작은 원들은 서로 접하고 안쪽 원과도 접할 뿐이므로, 이 n개의 부채꼴과 안쪽 원판은 서로 겹치지 않는다. 다각형에서 이들을 빼고 남는 것은 정확히 안쪽 원에 붙어 있는 n개의 곡선 삼각형이고, 이들을 모두 합한 것이 Y이다.

$$Y = nr\sqrt{R^2 - r^2} - \pi(R - r)^2 - n\pi r^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right),$$

이로써 구하려던 식을 얻는다.

생각해 보기 왜 변 C_1C_2가 X와 Y를 가르기에 알맞은 곳일까?

변 C_1C_2는 접점 M을 지나 중심에서 중심으로 이어지므로, 원들 사이의 틈을 결코 가로지르지 않는다. 안쪽 원에 붙은 틈은 모두 이 변의 O 쪽에 있고, 바깥 원에 붙은 틈은 모두 반대쪽에 있다. 따라서 다각형을 따라 자르면 두 종류의 틈이 깔끔하게 나뉘고, 각 작은 원은 두 반지름을 따라 잘린다. 그래서 부채꼴이 생기는 것이다.

넓이 X와 Z

다각형 바깥이면서 바깥 원 안쪽인 영역에서는 각 작은 원의 나머지 부분을 빼야 한다. 그 나머지는 중심각이 $2\pi - (\pi - \frac{2\pi}{n}) = \pi + \frac{2\pi}{n}$인 우각(reflex angle) 부채꼴이고, 넓이는 $\pi r^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)$이다. 따라서

$$X = \pi(R+r)^2 - nr\sqrt{R^2 - r^2} - n\pi r^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right).$$

반지름 r인 원판 n개로부터 다음을 얻는다.

$$Z = n\pi r^2.$$

$n \to \infty$일 때의 극한(limit)

더하면 다각형 항은 소거되고 부채꼴 항은 합쳐져 $n\pi r^2$이 된다.

$$\begin{aligned} X + Y &= \pi(R+r)^2 - \pi(R-r)^2 - n\pi r^2 \\ &= 4\pi Rr - n\pi r^2. \end{aligned}$$

이것은 원환(annulus)의 넓이에서 원들의 넓이를 뺀 것으로, 당연히 그래야 한다. 따라서

$$\frac{X+Y}{Z} = \frac{4\pi Rr - n\pi r^2}{n\pi r^2} = \frac{4R}{nr} - 1 = \frac{4}{n\sin(\pi/n)} - 1,$$

여기서 $r = R\sin(\pi/n)$을 이용했다. $n \to \infty$이면 $\pi/n \to 0$이고 $\dfrac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} \to 1$이므로 $n\sin(\pi/n) \to \pi$이고

$$\frac{X+Y}{Z} \to \frac{4}{\pi} - 1 \approx 0.273.$$

검산

- $n = 3, R = 1$이면 $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$이고 $Y \approx 0.0646$, $X \approx 3.7497$이다. 촘촘한 극좌표 격자 위에서 각 점을 원 안, 다각형 안, 다각형 밖으로 분류하여 수치적분을 해 보면, $n = 3, 5, 8, 12$에 대해 유효숫자 네 자리까지 일치했다.
- 비 $\frac{4}{n\sin(\pi/n)} - 1$의 값은 $n = 10$일 때 0.2944, $n = 100$일 때 0.27345, $n = 1000$일 때 0.273240이다. 값이 $4/\pi - 1 = 0.273240\ldots$에 점점 가까워진다.
- 직관적으로 보면, n이 클 때 원들은 폭이 $2r$인 띠 안에 지름 $2r$인 원판이 한 줄로 늘어선 모습이 된다. 각 $2r \times 2r$ 정사각형에서 원판이 πr^2을 차지하고 틈이 $4r^2 - \pi r^2$을 차지하므로, 비는 $(4-\pi)/\pi$가 된다.

흔한 실수

- 부채꼴의 각으로 다각형의 외각(exterior angle) $2\pi/n$을 써야 할 곳에 내각 $\pi - 2\pi/n$ 대신 잘못 쓰는 실수. 즉 내각 대신 외각을 쓰는 실수.
- Y에서 안쪽 원판을 빼야 한다는 것을 잊거나, 안쪽 원판이 정말로 다각형 안에 있는지 확인하지 않는 실수.

STEP 너머

마지막 극한은 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$이 모습을 바꾼 것이다. 이것은 아르키메데스(Archimedes)가 내접 다각형과 외접 다각형의 둘레 사이에 π를 끼워 넣을 때 쓴 바로 그 사실이다. 이 문제는 원 채우기 밀도(circle-packing density) 문제의 장난감 판이기도 하다. 여기서는 얇은 원환 중 원들이 채울 수 있는 비율을 묻는 것이다. 이런 극한을 엄밀하게 다루고 싶다면 Abbott의 *Understanding Analysis*를 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.