풀이

STEP I 1987, 문제 16

확률과 통계 • 베이즈 정리와 정규근사

> **STEP I 1987, 16번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q16

핵심 아이디어

소문항 (i)은 모습을 바꾼 베이즈 정리(Bayes' theorem)이다. 두 번 연속 같은 쪽으로 투표했다는 사실은 그 의원이 어느 당 소속인지에 대한 증거가 된다. 보존당(Preservative) 의원은 언제나 그렇게 하지만 진보당(Progressive) 의원은 가끔만 그렇게 하기 때문이다. 따라서 먼저 그 의원이 보존당 의원일 확률(probability)을 갱신하고, 그다음 세 번째 투표를 예측한다. 소문항 (ii)에서는 보존당 의원들의 표가 고정된 수이므로 모든 무작위성은 40명의 진보당 의원에게서 나온다. 이들의 찬성표 수는 이항분포(binomial distribution)를 따르며, 바로 이것을 정규분포(normal distribution)로 근사한다.

풀이

소문항 (i)

선택된 의원이 보존당 의원인 사건을 R라 하면 $P(R) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$이고 $P(R') = \frac{2}{5}$이다. 그 의원이 처음 두 번의 투표에서 같은 쪽으로 투표한 사건을 S_2, 세 번째 투표도 일치하는 사건을 S_3라 하자.

보존당 의원은 절대 마음을 바꾸지 않으므로 $P(S_2 \mid R) = 1$이다. 진보당 의원은 무작위로 투표하며, 각 투표에서 독립적으로 확률 $\frac{1}{2}$로 찬성 또는 반대한다. 첫 번째 투표가 무엇이었든 두 번째 투표가 그것과 일치할 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 $P(S_2 \mid R') = \frac{1}{2}$이다. 따라서

$$P(S_2) = \tfrac{3}{5} \cdot 1 + \tfrac{2}{5} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{4}{5}, \qquad P(R \mid S_2) = \frac{P(R)\,P(S_2 \mid R)}{P(S_2)} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}.$$

즉 관찰한 사실을 고려하면, 그 의원은 확률 $\frac{3}{4}$로 보존당 의원이고 확률 $\frac{1}{4}$로 진보당 의원이다.

생각해 보기 의원을 무작위로 선택했으니 그냥 $P(R \mid S_2) = \frac{3}{5}$라고 하면 왜 안 되는가?

정보 S_2는 진보당 의원보다 보존당 의원에게서 일어날 가능성이 더 크므로 승산(odds)을 바꾼다. 처음에는 승산이 보존당 쪽으로 3 : 2였다. S_2를 관찰한 뒤에는 $3 \cdot 1 : 2 \cdot \frac{1}{2} = 3 : 1$이 된다.

이제 의원의 소속 정당이 주어지면, 세 번째 투표는 처음 두 투표가 정당에 대해 알려 주는 것 이상으로는 그 두 투표에 의존하지 않는다. 보존당 의원은 반드시 같은 투표를 반복하고, 진보당 의원은 확률 $\frac{1}{2}$로 일치하게 투표한다. 따라서

$$P(S_3 \mid S_2) = \tfrac{3}{4} \cdot 1 + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{2} = \frac{7}{8}.$$

(같은 방법으로, $P(S_3 \mid S_2) = \dfrac{P(S_2 \cap S_3)}{P(S_2)} = \dfrac{\frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{4}{5}} = \dfrac{7/10}{4/5} = \dfrac{7}{8}$이다.)

소문항 (ii)

보존당 정책 안건에 대한 투표를 생각하고, 100명의 의원이 모두 투표한다고 가정하자. 60명의 보존당 의원 중 비율 α, 즉 60α명은 언제나 반대하고, 나머지 $60(1-\alpha)$명은 언제나 찬성한다. 찬성하는 진보당 의원의 수를 X라 하자. 각 진보당 의원은 독립적으로 확률 $\frac{1}{2}$로 찬성하므로

$$X \sim \mathrm{B}\left(40, \tfrac{1}{2}\right), \qquad E(X) = 20, \qquad \mathrm{Var}(X) = 40 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = 10.$$

100표 중 단순 과반수(simple majority)는 찬성이 최소 51표라는 뜻이다:

$$60(1-\alpha) + X \geq 51 \iff X \geq 60\alpha - 9.$$

$n = 40$이 꽤 크고 $p = \frac{1}{2}$이어서 이항분포가 대칭이므로, X를 $Y \sim \mathrm{N}(20, 10)$로 근사한다. 여기서 $60\alpha - 9$는 정수(의원의 수)이므로 연속성 수정(continuity correction)을 하면

$$P(\text{과반수}) = P(X \geq 60\alpha - 9) \approx P(Y > 60\alpha - 9.5) = P\left(Z > \frac{60\alpha - 29.5}{\sqrt{10}}\right),$$

이고, 여기서 $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$이다.

이 확률은 α가 증가할수록 감소하므로, 선거는 α가 이 확률을 0.8 아래로 떨어뜨릴 만큼 클 때에 정확히 실시된다. 표에서 $P(Z > -0.8416) = 0.8$이므로 다음이 필요하다.

$$\frac{60\alpha - 29.5}{\sqrt{10}} > -0.8416 \iff 60\alpha > 29.5 - 0.8416\sqrt{10} = 26.84$$

$$\iff \alpha > 0.447.$$

60α는 의원의 수이므로 정수여야 하고, 가능한 가장 작은 값은 $60\alpha = 27$이다. 따라서 선거로 이어지는 α의 최솟값은

$$\alpha = \frac{27}{60} = 0.45.$$

이것이 맞는지 확인해 보자. 반란표가 26명일 때 과반수가 될 근사 확률은 $P(Z > -1.107) \approx 0.866$이고, 27명일 때는 $P(Z > -0.791) \approx 0.785 < 0.8$이다.

검산

- (i)에서 $\frac{7}{8}$은 당연히 $\frac{1}{2}$(진보당 의원임을 아는 경우)과 1(보존당 의원임을 아는 경우) 사이에 있다. 무작위 의원 400,000명을 시뮬레이션한 결과는 0.875였다.
- (ii)에서 정확한 이항 확률은 $P(X \geq 17) = 0.8659$(반란표 26명)와 $P(X \geq 18) = 0.7852$(반란표 27명)이다. 이 값들은 정규근사 값과 소수점 아래 셋째 자리까지 일치하며, 경계가 반란표 26명과 27명 사이, 즉 $\alpha = 0.45$임을 확인해 준다.

흔한 실수

- (i)에서 $\frac{3}{5} \cdot 1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{5}$라고 답하는 것. 이는 그 의원이 이미 두 번 같은 쪽으로 투표했다는 정보를 무시한 것이다.
- 단순 과반수를 "최소 50표"로 보는 것. 50 대 50 동수는 과반수가 아니므로 51표가 필요하다.
- 연속성 수정을 빠뜨리는 것. 연속성 수정을 하지 않으면 기준이 $\alpha > 0.456$이 되어 반란표가 27명이 아니라 28명이 되는데, 이는 정확한 이항 계산에 따르면 틀린 답이다.

STEP 너머

소문항 (i)은 **베이즈 갱신**(*Bayesian updating*)의 작은 예이다. 자료가 숨겨진 "유형"에 대한 우리의 믿음을 바꾸고, 예측은 갱신된 믿음에 대한 평균으로 얻어진다(사후 예측 분포(posterior predictive distribution)). 소문항 (ii)의 정규근사는 중심극한정리(central limit theorem)의 한 경우이며, 여기서 거의 완벽하게 일치하는 것은 우연이 아니다. $p = \frac{1}{2}$일 때 이항분포는 대칭이기 때문이다. 두 아이디어 모두 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)에서 꼼꼼하게 전개된다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.