풀이

STEP I 1987, 문제 14

확률과 통계 • 확률의 등비급수

> **STEP I 1987, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q14

핵심 아이디어

첫 경기가 끝나고 나면, 승부가 나지 않은 토너먼트(tournament)에는 선택의 여지가 전혀 남지 않는다. 각 경기의 승자는 심판(referee)과 맞붙고, 토너먼트가 계속 미결정 상태로 남으려면 심판이 이겨야 하므로 다음 승자는 강제로 정해진다. 따라서 모든 것은 1경기의 승자가 누구인지, 그리고 어떤 선수가 처음으로 두 번 연속 이기는 바로 그 순간에 의해 결정된다. 그러면 확률은 주기(period) 3으로 순환하는 등비급수(geometric series)로 환원된다.

풀이

이 풀이 전체에서, 각 경기에서는 직전 경기의 승자가 그 경기의 심판과 맞붙는다. 직전 경기의 패자는 쉬면서 심판을 맡으므로 현재 경기에서 이길 수 없다.

소문항 (i)

1경기: A가 B를 이기고, B가 2경기의 심판을 맡는다. 2경기는 A 대 C이고 C가 이기는데, 이는 가능하다. 3경기는 C 대 B이고 B가 이기는데, 이것도 가능하다. 그러나 아무도 두 경기를 연속으로 이기지 않았으므로, ACB 이후에도 토너먼트는 여전히 미결정 상태이며 계속되어야 한다. 따라서 ACB는 완결된 토너먼트의 기록이 **아니다**(토너먼트의 시작 부분일 뿐이다).

소문항 (ii)

A가 1경기를 이기면, 2경기는 B가 심판을 맡는 가운데 A 대 C로 치러진다. 따라서 B는 2경기를 이길 수 없고, ABB는 **불가능하다**.

소문항 (iii)

(i)에서처럼 처음 세 경기 ACB는 가능하고, 3경기는 A가 심판을 맡는 가운데 C 대 B였다. 따라서 4경기는 B 대 A이고, B는 이 경기를 이길 수 있다. 이제 B가 3경기와 4경기를 연속으로 이겼으므로 토너먼트가 끝난다. 따라서 $ACBB$는 완결된 토너먼트가 **맞으며**, B가 네 경기 만에 우승한다.

5경기 후 미결정

X가 1경기를 이긴다고 하자. 여기서 X는 A 또는 B이고, 나머지 한 명을 Y라 하자. 토너먼트가 계속 미결정 상태로 남으려면, 각 경기는 직전 승자가 **아닌** 선수가 이겨야 하며, 그 선수는 직전 경기의 심판일 수밖에 없다. 그러면 기록은 다음과 같이 강제된다.

$$X\,C\,Y\,X\,C\,Y\,X\,\ldots$$

새로운 승자는 매번 직전 경기의 심판이기 때문이다. 구체적으로, 2경기는 X 대 C(Y가 심판)이므로 C가 이겨야 한다. 3경기는 C 대 Y(X가 심판)이므로 Y가 이겨야 한다. 4경기는 Y 대 X이므로 X가 이겨야 하고, 이런 식으로 주기 3으로 계속된다.

1경기는 어느 쪽이 이겨도 된다. 그 이후로는 경기들이 서로 독립(independent)이고 각 선수가 이길 확률이 반반이므로, 미결정 상태를 유지하는 각 경기는 확률 $\frac{1}{2}$로 일어난다. 따라서

$$P(n\text{경기 후 미결정}) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}, \qquad P(5\text{경기 후 미결정}) = \tfrac{1}{16}.$$

누가, 언제 우승하는가

토너먼트가 n번째 경기에서 끝나는 것은($n \geq 2$), $n-1$경기 후 미결정 상태이고 $n-1$번째 경기의 승자가 다시 이길 때이다. 이 확률은 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이다. 우승자는 $n-1$번째 경기의 승자, 즉 강제된 수열의 $(n-1)$번째 문자이다. $k = n-1$이라 쓰자. 그러면 다음과 같다.

$k \bmod 3$	1	2	0
A가 1경기에서 이긴 경우 우승자	A	C	B
B가 1경기에서 이긴 경우 우승자	B	C	A

따라서 토너먼트는 확률 $\left(\frac{1}{2}\right)^{k}$로 $k+1$번째 경기에서 끝난다. $k \equiv 2 \pmod 3$이면 이 확률 전체가 C의 몫이다. 그렇지 않으면 A와 B가 똑같이 나누어 가져서 각각 $\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$이 된다.

생각해 보기 왜 $k \equiv 2$일 때는 C가 확률 전체를 가져가지만, 다른 때에는 절반만 가져갈까?

1경기를 누가 이겼든, C는 항상 강제된 수열의 두 번째 문자이다. 따라서 두 갈래 모두 같은 순간에 C에게 우승을 준다. A와 B는 두 갈래에서 역할이 서로 바뀌므로, 각자는 자신이 그 자리에 있는 갈래의 확률만 가져간다.

5경기 이내에 우승하기

여기서 $n = 2, 3, 4, 5$이므로 $k = 1, 2, 3, 4$이다.

$$P(A\text{의 우승 경기 수} \le 5) = \underbrace{\tfrac{1}{4}}_{k=1} + \underbrace{\tfrac{1}{16}}_{k=3} + \underbrace{\tfrac{1}{32}}_{k=4} = \tfrac{11}{32},$$

$$P(B\text{의 우승 경기 수} \le 5) = \tfrac{11}{32} \quad (A\text{와 } B \text{ 사이의 대칭성에 의해}),$$

$$P(C\text{의 우승 경기 수} \le 5) = \underbrace{\tfrac{1}{4}}_{k=2}.$$

검산하면 $\frac{11}{32} + \frac{11}{32} + \frac{8}{32} = \frac{15}{16} = 1 - \frac{1}{16}$이고, 이는 5경기 후 미결정일 확률과 일치한다.

최종 우승자

$P(\text{undecided after } n \text{ games}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \to 0$이므로, 토너먼트는 확률 1로 끝난다. 따라서 모든 $k \ge 1$에 대해 더하기만 하면 된다. 각 잉여류(residue class)는 공비가 $\frac{1}{8}$인 등비급수를 준다.

$$P(C \text{ 우승}) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{256} + \cdots = \frac{1/4}{1 - 1/8} = \frac{2}{7},$$

$$P(A \text{ 우승}) = \underbrace{\left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{32} + \cdots\right)}_{k \equiv 1} + \underbrace{\left(\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{128} + \cdots\right)}_{k \equiv 0} = \frac{1/4}{7/8} + \frac{1/16}{7/8} = \frac{2}{7} + \frac{1}{14} = \frac{5}{14},$$

이므로 요구된 결과를 얻는다. 대칭성에 의해 $P(B \text{ 우승}) = \frac{5}{14}$이기도 하며, 실제로 $\frac{5}{14} + \frac{5}{14} + \frac{2}{7} = 1$이다.

따라서 첫 경기에서 쉬는 C는 불리하다. 나머지 두 선수가 각각 $\frac{5}{14} \approx 0.357$인 데 비해 C는 $\frac{2}{7} \approx 0.286$이다.

검산

- 5경기 이내에 우승할 세 확률을 더하면 $\frac{15}{16}$이고, 최종 우승 확률들을 더하면 1이다.
- 가능한 모든 경기 순서를 분수로 정확하게 열거해 보면 $\frac{1}{16}$, $\frac{11}{32}$, $\frac{11}{32}$, $\frac{1}{4}$가 확인된다. 60경기까지 계산하면 A와 B는 $0.357142\ldots$, C는 $0.285714\ldots$가 나온다.

- C에 대한 간단한 다른 방법: C가 우승할 확률을 c라 하자. 1경기 후 C는 확률 $\frac{1}{4}$로 곧바로 우승한다. 세 경기 뒤에 같은 상황으로 되돌아오면(확률 $\frac{1}{8}$) 처음부터 다시 시작하는 셈이므로 $c = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}c$이고, 따라서 $c = \frac{2}{7}$이다.

흔한 실수

- ACB가 올바른 기록이라고 말하는 것: 그 안의 각 경기는 모두 가능하지만, 아무도 두 번 연속 이기지 않았으므로 토너먼트는 끝나지 않았다.
- 직전 패자가 심판을 맡으므로 다음 경기를 이길 수 없다는 사실을 잊는 것(이 사실 때문에 ABB가 배제된다).
- $k \equiv 2$일 때 C에게 확률의 절반만 주는 것: 그 순간에는 **두** 갈래 모두에서 C가 우승한다.

STEP 너머

이 토너먼트는 마르코프 연쇄(Markov chain)이다. 각 경기 후의 상태는 단지 "누가 마지막에 이겼고, 누가 심판을 맡고 있는가"이며, 우승자는 연쇄가 흡수(absorption)될 때 결정된다. 검산 절에서 쓴 첫 단계 논법, 즉 다음에 일어날 일에 대해 조건을 걸어 확률에 대한 방정식을 세우는 방법은 흡수 확률을 구하는 표준적인 방법이며, 급수를 더하는 과정을 피할 수 있게 해 준다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 대학 1학년 수준에서 마르코프 연쇄와 흡수를 소개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.