풀이

STEP I 1987, 문제 13

역학 • 가변적인 힘

> **STEP I 1987, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q13

핵심 아이디어

힘의 법칙이 $x = 0$에서 바뀌므로 운동은 여러 단계로 나뉘고, 각 단계는 간단한 선형 미분방정식(linear differential equation)으로 기술된다. 양의 쪽에서 힘은 변위에 비례하는 복원력(restoring force)이므로 단순 조화 운동(simple harmonic motion)이 일어나고, 음의 쪽에서 힘은 속도에 비례하는 저항(resistance)이므로 속력이 지수적으로 감소(exponential decay)한다. 한 단계가 끝날 때의 위치와 속도가 다음 단계의 초기 조건(initial conditions)이 된다. 진짜 질문은 단계가 몇 개냐는 것이다. 입자가 다시 돌아오기는 할까?

풀이

모형

물체를 주어진 힘만 받으며 x축 위를 움직이는 입자로 보고, $\dot{x} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$로 쓴다. 뉴턴(Newton)의 제2법칙 $m\ddot{x} = \mathrm{F}$로부터

$$\ddot{x} = -\mu^2 x \quad (x \geq 0), \qquad\qquad \ddot{x} = -\kappa\dot{x} \quad (x < 0).$$

를 얻는다. 질량은 약분되므로 답에 아무런 영향을 주지 않는다.

1단계: $x \geq 0$인 동안의 단순 조화 운동

$v_0 > 0$이므로 입자는 곧바로 $x > 0$인 영역으로 들어가고, 여기서 $\ddot{x} = -\mu^2 x$이다. 이는 각진동수(angular frequency)가 μ인 단순 조화 운동이므로 일반해(general solution)는

$$x = A\cos\mu t + B\sin\mu t.$$

이다. $t = 0$에서 $x = 0$이라는 조건에서 $A = 0$을 얻고, $t = 0$에서 $\dot{x} = B\mu = v_0$이라는 조건에서 $B = v_0/\mu$를 얻는다. 따라서

$$x = \frac{v_0}{\mu}\sin \mu t, \qquad \dot{x} = v_0 \cos \mu t.$$

이다. 이 식은 $x \geq 0$인 동안, 즉 $\sin \mu t \geq 0$인 동안, 곧 $0 \leq t \leq \pi/\mu$에서 성립한다. 입자는 $t = \pi/(2\mu)$에서 최대 변위 v_0/μ에 이르고,

$$t = T = \frac{\pi}{\mu}, \qquad \text{속도는} \qquad \dot{x} = v_0 \cos \pi = -v_0.$$

로 원점에 돌아온다. 이쪽에서는 에너지가 보존되므로(힘 $-m\mu^2 x$는 위치 에너지(potential energy) $\frac{1}{2}m\mu^2 x^2$에서 나오며, 이는 원점에서 0이다) 입자는 출발할 때와 같은 속력으로 돌아온다.

2단계: $x < 0$인 동안의 저항을 받는 운동

이제 입자는 속도 $-v_0$으로 $x < 0$인 영역에 들어가고, 여기서 $\ddot{x} = -\kappa\dot{x}$이다. $u = \dot{x}$로 두면 이는 1계 방정식(first-order equation) $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t = -\kappa u$이고, $t = T$에서 $u = -v_0$을 만족하는 해는

$$\dot{x} = -v_0\, \mathrm{e}^{-\kappa(t-T)}.$$

이다. $t = T$에서 $x = 0$이라는 조건으로 적분하면

$$x = \int_T^t -v_0\, \mathrm{e}^{-\kappa(s-T)}\, \mathrm{d}s = -\frac{v_0}{\kappa}\left(1 - \mathrm{e}^{-\kappa(t-T)}\right).$$

이다.

? **생각해 보기** 입자가 다시 $x \geq 0$으로 돌아와 세 번째 단계가 시작될까?

그렇지 않다. 속도 $-v_0\mathrm{e}^{-\kappa(t-T)}$는 모든 $t > T$에서 음수이므로 이 단계 내내 x는 감소한다. 따라서 모든 $t > T$에서 x는 순음수이고 위의 식은 영원히 성립한다. 저항은 입자를 느리게 할 뿐 방향을 되돌리지는 못한다. $t \to \infty$일 때 $\mathrm{e}^{-\kappa(t-T)} \to 0$이므로, 입자는 점 $x = -v_0/\kappa$에 다가가지만 결코 도달하지는 않는다.

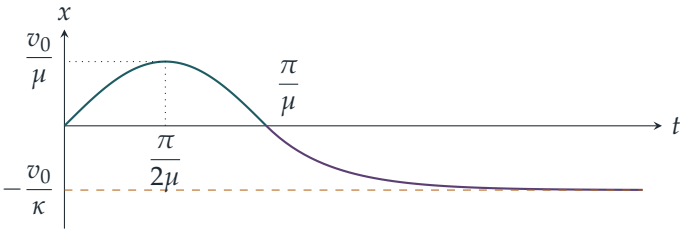
답

$$x = \begin{cases} \dfrac{v_0}{\mu}\sin \mu t, & 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{\mu}, \\ -\dfrac{v_0}{\kappa}\left(1 - \mathrm{e}^{-\kappa(t-\pi/\mu)}\right), & t > \dfrac{\pi}{\mu}. \end{cases}$$

두 조각 모두 $t = \pi/\mu$에서 $x = 0$이고 $\dot{x} = -v_0$이므로, 그래프는 그 점에서 매끄럽다(기울기가 연속이다). 다만 $\dot{x}$는 0에서 κv_0으로 갑자기 바뀐다.

개형

그래프는 축 위쪽의 사인 곡선 반 아치와, 그 뒤를 잇는 곡선으로 이루어진다. 뒤쪽 곡선은 같은 기울기 $-v_0$으로 원점을 떠나 점근선(asymptote) $x = -v_0/\kappa$를 향해 평평해진다. (그림은 $\mu = 1, \kappa = 1$인 경우이다.)



일반적으로 최고 높이 v_0/μ와 점근선의 깊이 v_0/κ는 서로 독립이다. 저항이 약하면(즉 κ가 작으면) 입자는 왼쪽으로 멀리까지 흘러간다.

검산

- 단위: μ와 κ는 모두 단위가 s^{-1}이므로, v_0/μ와 v_0/κ는 마땅히 그래야 하듯 길이이다.
- 극한 경우: $\kappa \to 0$이면 저항이 없어지고, 실제로 $-\frac{v_0}{\kappa}(1 - \mathrm{e}^{-\kappa s}) \to -v_0 s$가 되어 속력 v_0의 등속 운동이 된다.
- 수치 계산: $\mu = 1.7$, $\kappa = 0.9$, $v_0 = 2.2$에 대해 룽게-쿠타(Runge–Kutta) 방법으로 운동 방정식을 계산한 결과, $0 \le t \le 15$에서 공식과 3×10^{-5} 이내로 일치했다. 입자는 $x = 1.2941 = v_0/\mu$에서 최고점에 이르렀고 $x = -2.4444 = -v_0/\kappa$에 자리 잡았다.

흔한 실수

- 두 번째 단계에서 시간을 $t = \pi/\mu$가 아니라 $t = 0$부터 재는 것. 지수는 반드시 $-\kappa(t - \pi/\mu)$여야 한다.
- 입자가 $x \ge 0$으로 다시 들어오는지 확인하는 것을 잊는 것. 문제는 이후의 운동 **전체**를 묻고 있으므로, 세 번째 단계가 없다는 주장에는 한 줄짜리 근거가 필요하다.

STEP 너머

여기서 힘은 $x = 0$의 양쪽에서 서로 다른 선형식으로 주어지는데, 이를 구간별 선형계(piecewise-linear system)라 한다. 전환점에서 위치와 속도를 맞추어 해들을 이어 붙이는 기법은 미분방정식 첫 강의에서 이런 계(그리고 충돌과 마찰 문제)를 다루는 표준

적인 방법이다. 두 항을 한꺼번에 넣은 $\ddot{x} + \kappa\dot{x} + \mu^2 x = 0$은 감쇠 조화 진동자(damped harmonic oscillator)이며, 그 부족 감쇠(underdamped), 임계 감쇠(critically damped), 과감쇠(overdamped) 영역은 모든 역학 입문 강의의 핵심 예제이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 감쇠 진동자를 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.