풀이

STEP I 1987, 문제 12

역학 • 반발이 있는 포물체

STEP I 1987, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/87-s1-q12

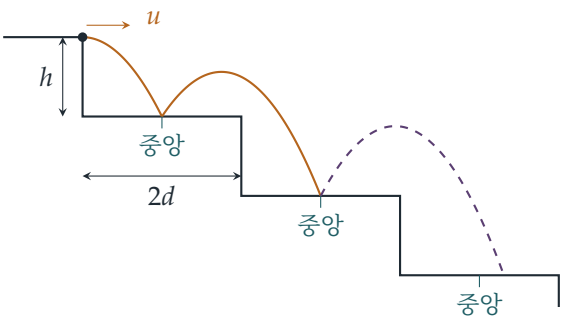
핵심 아이디어

튀어 오르는 사이사이에 입자는 포물체(projectile)로 운동하고, 계단이 매끄러우면 한 번 튈 때 속도의 연직 성분만 방향이 바뀌고 크기가 일정한 비율로 줄어든다. 따라서 수평 속력은 결코 변하지 않는다. 이는 수평 거리가 비행 시간을 결정하고, 비행 시간과 계단 한 칸의 높이가 함께 연직 속력을 결정한다는 뜻이다. 모든 것을 첫 번째 낙하에 걸리는 시간을 단위로 나타낼 수 있으므로 계산이 아주 간단해진다.

풀이

모형

입자를 질점(point mass)으로 보고, 공기 저항(air resistance)을 무시하며, 계단은 매끄럽고 수평이라고 가정한다. 그러면 충돌은 수평 속도를 바꾸지 않고 연직 속도에 $-e$를 곱한다. 입자를 수평 속력 u로 차 낸다고 하고, 첫 번째 비행에 걸리는 시간을 t_1이라 하자.



실선 호는 처음 두 번의 비행이고, 점선 호는 그다음에 실제로 일어나는 운동이다(마지막 부분 참고).

반발계수

첫 번째 비행. 입자는 연직 속도 없이 출발하여 h만큼 떨어지고, 수평으로 d만큼(계단 폭의 절반, 즉 첫 번째 계단의 중앙까지) 이동한다. 따라서

$$h = \tfrac{1}{2}gt_1^2, \qquad d = ut_1.$$

입자는 아래 방향 연직 속력 gt_1로 첫 번째 계단에 부딪히고, 위 방향 연직 속력 egt_1로 튀어오르며, 수평 속력은 여전히 u이다.

두 번째 비행. 첫 번째 계단의 중앙에서 두 번째 계단의 중앙까지의 수평 거리는 $2d$이다. 수평 속력은 여전히 $u = d/t_1$이므로, 이 비행에 걸리는 시간은

$$T = \frac{2d}{u} = 2t_1.$$

이 시간 동안 입자는 높이가 h만큼 낮아져야 한다. 위 방향을 양으로 잡으면

$$\begin{aligned} -h &= (egt_1)(2t_1) - \tfrac{1}{2}g(2t_1)^2 \\ &= (2e-2)\,gt_1^2 \\ &= (2e-2)(2h), \end{aligned}$$

이고, 여기서 $gt_1^2 = 2h$를 이용하였다. 양변을 h로 나누면 $-1 = 4e - 4$이므로

$$e = \tfrac{3}{4}.$$

(이 비행에서 입자가 첫 번째 계단의 모서리 위를 지날 때 그 계단보다 $egt_1 \cdot t_1 - \tfrac{1}{2}gt_1^2 = \tfrac{1}{2}h$만큼 높은 곳에 있으므로, 모서리에 걸리지 않고 넘어간다.)

계속 이어질 수 있을까?

? 생각해 보기 이 패턴이 계속된다면 이후의 모든 비행은 어떤 모습이어야 할까?

한 계단의 중앙에서 다음 계단의 중앙까지의 모든 비행은 속력 u로 수평 거리 $2d$를 가므로 각각 $2t_1$의 시간이 걸리고, 각각 정확히 h만큼 내려가야 한다. 그러면 위의 계산에 의해 매번 튀어 오른 직후의 위 방향 연직 속력 w는

$$-h = w(2t_1) - 2gt_1^2 = 2wt_1 - 4h, \qquad \text{따라서} \qquad w = \frac{3h}{2t_1} = \tfrac{3}{4}gt_1.$$

을 만족해야 한다. 즉 매번 튈 때마다 입자는 연직 속력 $\tfrac{3}{4}gt_1$로 떠나야 하고, $e = \tfrac{3}{4}$이므로 모든 계단에 정확히 연직 속력 gt_1로 도달해야 한다.

이는 첫 번째 계단에서는 성립하지만 두 번째 계단에서는 성립하지 않는다. $2t_1$ 동안 비행한 뒤 두 번째 계단에 도달할 때의 연직 속도는

$$\tfrac{3}{4}gt_1 - g(2t_1) = -\tfrac{5}{4}gt_1,$$

이므로, 입자는 gt_1이 아니라 아래 방향 속력 $\frac{5}{4}gt_1$로 두 번째 계단에 부딪히고, 위 방향 속력 $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}gt_1 = \frac{15}{16}gt_1 > \frac{3}{4}gt_1$로 튀어 오른다. 따라서 이는 **불가능하다**. 입자가 모든 계단의 중앙에 떨어질 수는 없다. 실제로 입자는 세 번째 계단의 중앙을 지나쳐 떨어진다. 세 번째 비행에 걸리는 시간을 st_1이라 하면

$$-h = \tfrac{15}{16}gt_1(st_1) - \tfrac{1}{2}gs^2t_1^2 \quad\Longrightarrow\quad s^2 - \tfrac{15}{8}s - 1 = 0 \quad\Longrightarrow\quad s = \frac{15+\sqrt{481}}{16} \approx 2.31,$$

이므로, 입자는 수평으로 약 $2.31d$를 이동하여 세 번째 계단의 중앙에서 약 $0.31d$ 지난 곳에 떨어진다(반대편 모서리까지는 $3d$이므로 여전히 그 계단 위이다).

검산

- $e = \frac{3}{4}$는 g, h, d에 의존하지 않는데, 이는 당연하다. 계단 전체의 크기를 바꾸어도 경로의 모양은 전혀 달라지지 않기 때문이다.
- $g = 9.8, h = d = 1, e = 0.75$로 수치 모의실험을 하면 입자는 $x = 1.000$과 $x = 3.000$(처음 두 계단의 중앙)에 떨어지고, 그다음 $x \approx 5.308$에 떨어지는데, 이는 위에서 예측한 $3 + 2.308$과 일치한다.
- 튀어 오르지 않는다면($e = 0$) 두 번째 비행에서 입자는 $2t_1$ 동안 $4h$만큼 떨어질 것이다. 튀어 오름이 그중 $3h$를 메워야 하므로 $2t_1 \cdot w = 3h$이고, 이는 앞에서 구한 결과와 같다.

흔한 실수

- 첫 번째 수평 거리를 d가 아니라 $2d$로 잡는 실수. 입자는 모서리에서 출발하여 첫 번째 계단의 중앙에 떨어진다.
- 튈 때 수평 속력을 바꾸는 실수. 매끄러운 면에서는 충격량(impulse)이 연직 방향이므로 연직 성분만 바뀐다.
- 비행이 매번 똑같아 보인다는 이유로 "가능하다"고 결론짓는 실수. 도달 속력이 커지므로 튀어 오르는 속력도 커진다.

STEP 너머

튀어 오르는 입자는 **이산 동역학계**(discrete dynamical system)의 간단한 예이다. 한 번 튄 직후의 상태가 고정된 사상을 통해 다음번 튄 직후의 상태를 결정하며, 운동이 반복될 수 있

는지 묻는 것은 그 사상의 고정점(fixed point)을 묻는 것과 같다. 여기서 고정점(튀어 오르는 속력 $\frac{6}{7}gt_1$로, 이때는 $\frac{4}{7}h$만큼만 낮은 곳에 떨어진다)은 계단과 맞지 않으므로, 이 계단에 들어맞는 주기 운동은 없다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 충돌과 충격량을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.