풀이

STEP I 1987, 문제 11

역학 • 원운동과 에너지

> **STEP I 1987, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q11

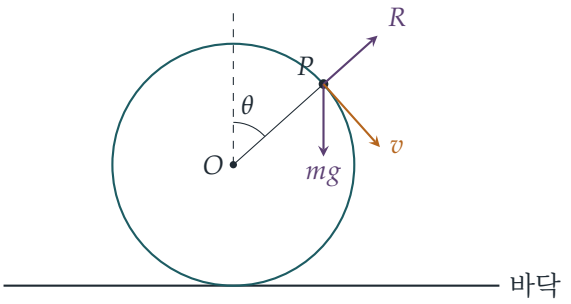
핵심 아이디어

입자가 구 위에 있는 동안에는 원운동을 하므로 두 식이 그 운동을 지배한다. 에너지 보존(energy conservation)으로 속력을 구하고, 반지름 방향으로 쓴 뉴턴(Newton)의 제2법칙(Newton's second law)으로 수직항력(normal reaction)을 구한다. 접촉은 정확히 수직항력이 0이 되는 순간에 끊어진다. 그 뒤로 입자는 포물체(projectile)가 되므로 수평 방향 속도는 변하지 않는다. 이 사실을 바닥까지 이어지는 에너지 보존과 결합하면 궤적을 직접 구하지 않고도 연직 방향 속도를 얻을 수 있다.

풀이

모형

입자를 매끄럽고 고정된 구 위의 질점(point mass)으로 본다. 구의 중심 O는 바닥에서 높이 r인 곳에 있다(구는 바닥 위에 놓여 있다). "살짝 밀어 움직인다"는 것은 입자가 꼭대기에서 무시할 만큼 작은 속력으로 출발한다는 뜻이다. 입자를 P라 하고, OP가 위쪽 연직 방향과 이루는 각을 θ, 입자의 속력을 v라 하자. 작용하는 힘은 무게 mg와 OP를 따라 바깥쪽으로 작용하는 수직항력 R뿐이다.



접촉이 끊어지는 곳

입자는 높이 $r - r\cos\theta$만큼 내려왔으므로, 에너지 보존에 의해(수직항력은 운동 방향에 수직이므로 일을 하지 않는다)

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mgr(1-\cos\theta), \qquad \text{따라서} \qquad v^2 = 2gr(1-\cos\theta).$$

접촉하고 있는 동안 입자는 반지름 r인 원 위를 움직이므로 O를 향하는 가속도는 v^2/r이다. O를 향하는 방향으로 힘을 분해하면

$$mg\cos\theta - R = \frac{mv^2}{r} = 2mg(1-\cos\theta), \qquad \text{따라서} \qquad R = mg(3\cos\theta - 2).$$

꼭대기에서는 $R = mg > 0$이고, θ가 커질수록 R는 줄어든다. 접촉은 $R = 0$일 때, 즉

$$\cos\theta = \tfrac{2}{3}, \qquad v^2 = \tfrac{2}{3}gr.$$

일 때 끊어진다.

생각해 보기 속도가 수평 방향과 이루는 각은 어느 각인가?

속도는 원의 접선 방향이고, 접선은 반지름 OP에 수직이다. 반지름이 연직 방향과 각 θ를 이루므로, 접선은 수평 방향과 같은 각 θ를 이룬다(두 직선을 모두 직각만큼 회전시켜 보라). 따라서 구를 떠나는 순간 입자는 수평 방향 아래로

$$\cos^{-1}\tfrac{2}{3} \approx 48.2^\circ$$

의 각을 이루며 아래쪽으로 움직이고 있다.

바닥에 부딪힐 때

떠나는 순간 속도의 수평 성분은

$$v\cos\theta = \sqrt{\tfrac{2}{3}gr}\cdot\tfrac{2}{3}, \qquad \text{따라서} \qquad (v\cos\theta)^2 = \tfrac{8}{27}gr.$$

이다. 그 뒤로 작용하는 힘은 중력뿐이므로, 입자가 바닥에 닿을 때까지 이 수평 성분은 변하지 않는다. (입자는 구에 다시 닿지 않는다. R가 음수가 되어야 하는 순간부터는 구가 입

자가 떨어지는 것보다 더 빨리 휘어져 멀어지며, 입자는 O를 지나는 연직선에서 수평 거리로 약 $1.46r$ 떨어진 곳에 떨어지므로 구와 충분히 떨어져 있다.)

이제 꼭대기(높이 $2r$)에서 정지 상태로 출발해 바닥에 이르는 전체 운동에 에너지 보존을 적용한다. 입자가 바닥에 부딪히는 속력을 V라 하면

$$\tfrac{1}{2}mV^2 = mg(2r), \qquad \text{따라서} \qquad V^2 = 4gr.$$

충돌할 때 속도의 연직 성분을 V_y라 하면 $V^2 = (v\cos\theta)^2 + V_y^2$이므로

$$V_y^2 = 4gr - \tfrac{8}{27}gr = \tfrac{100}{27}gr, \qquad V_y = \frac{10}{3}\sqrt{\frac{gr}{3}}.$$

따라서 바닥에 부딪힐 때 운동량(momentum)의 연직 성분의 크기는

$$mV_y = \frac{10m}{3}\sqrt{\frac{gr}{3}} = \frac{10m\sqrt{3gr}}{9},$$

이고, 방향은 아래쪽이다.

검산

- 포물체 운동을 직접 이용하는 방법: 입자는 높이 $r + r\cos\theta = \tfrac{5}{3}r$에서 아래 방향 연직 속력 $v\sin\theta$로 떠나며, 여기서 $\sin\theta = \tfrac{\sqrt{5}}{3}$이므로 $(v\sin\theta)^2 = \tfrac{10}{27}gr$이다. 다시 $\tfrac{5}{3}r$만큼 떨어지면서 $2g\cdot\tfrac{5}{3}r = \tfrac{90}{27}gr$가 더해지므로, 역시 $V_y^2 = \tfrac{100}{27}gr$를 얻는다.
- $V_y^2 = \tfrac{100}{27}gr \approx 3.70gr$는 $V^2 = 4gr$보다 조금 작은데, 에너지의 일부가 수평 운동에 남아 있으므로 당연히 그래야 한다.
- 운동을 수치적으로 단계별 계산하면($g = 9.81$, $r = 1.3$, $m = 2$) 접촉은 48.19°에서 끊어지고 연직 운동량은 13.745로, $\tfrac{10m\sqrt{3gr}}{9}$와 일치한다. 궤적은 구 바깥에 머문다.

흔한 실수

- 낙하 높이를 구의 꼭대기가 아니라 바닥에서부터 재는 실수. 구 위에서 내려온 높이는 $r(1-\cos\theta)$이다.
- 떠난 뒤에는 수평 속도가 일정하다는 사실을 잊고, 운동 에너지가 모두 연직 방향인 것처럼 $V_y^2 = 4gr$라고 쓰는 실수.
- 속도가 수평 방향과 각 $90^\circ - \theta$를 이룬다고 보는 실수. 그것은 접선이 아니라 반지름의 각이다.

STEP 너머

"수직항력이 사라질 때 접촉이 끊어진다"는 조건은 **구속력**(constraint force)의 첫 번째 예이다. 구속력은 입자를 곡면 위에 붙잡아 두도록 스스로 크기를 조절하는 힘이며, 밀기만 할 수 있다. 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)에서는 이런 구속 조건을 처음부터 식에 넣으며, 수직항력은 라그랑주 승수(Lagrange multiplier)로 나타난다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 한 단계 높은 수준에서 원운동과 에너지 방법을 연습하기에 아주 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.