풀이

STEP I 1987, 문제 10

역학 • 탄성 끈

> **STEP I 1987, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q10

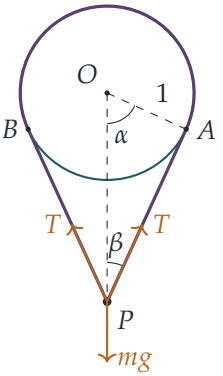
핵심 아이디어

입자가 띠의 아랫부분을 원기둥에서 끌어내리므로, 띠는 두 부분으로 나뉜다. 위쪽에서 여전히 원기둥에 밀착해 있는 호와, 원기둥에서 **접선**(*tangent*) **방향으로** 떨어져 나와 입자에서 만나는 두 직선 부분이다. 그러면 늘어난 길이는 순수한 기하 문제가 된다. 직각삼각형을 이용하면 직선 부분의 길이와 축에서 바라본 각을 구할 수 있다. 원기둥이 매끄러우므로 장력(tension)은 띠 전체에서 같고, 입자에서 힘을 분해하면 이 장력을 mg와 연결할 수 있다. 그다음 훅의 법칙(Hooke's law)으로 λ를 구한다.

풀이

모형

띠는 자연 길이(natural length)가 2π이고 훅의 법칙을 따르는 가벼운 탄성 끈(elastic string)으로, 원기둥은 매끄러운 것으로, 입자는 질점(point mass)으로 모형화한다. 연직 단면에서 생각하자. 원기둥은 중심 O가 축 위에 있는 단위원이고, 입자는 O에서 연직 아래로 거리 x만큼 떨어진 점 P에 있다. 띠가 원기둥에서 떨어지려면 $x > 1$이어야 한다.



O를 지나는 연직선에 대한 대칭성에 의해, 띠는 양쪽에 하나씩 두 점 A와 B에서 원기둥을 떠난다. 팽팽한 끈이 매끄러운 곡선에서 떨어져 나올 때는 접선 방향으로 떠나므로, PA는 A에서 원에 접하고, 따라서 $OA \perp AP$이다. $\alpha = \angle AOP$, $\beta = \angle APO$라 하자.

늘어난 길이

삼각형 OAP는 A에서 직각이고, $OA = 1$, 빗변은 $OP = x$이다. 따라서

$$AP = \sqrt{x^2 - 1}, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{x}, \qquad \sin\beta = \frac{1}{x}.$$

띠는 아래쪽을 지나는 A와 B 사이, 즉 O에서 각 2α를 이루는 부분을 제외한 모든 곳에서 원기둥과 접촉한다. 그러므로 접촉하는 호의 중심각은 $2\pi - 2\alpha$이고, 단위원에서 그 길이는 $2\pi - 2\alpha$이다. 두 직선 부분을 더하면 늘어난 길이는

$$\boxed{L = 2\sqrt{x^2 - 1} + 2\pi - 2\arccos\frac{1}{x}}$$

이다. 여기서 $x > 1$이므로 $\arccos(1/x)$는 0과 $\frac{\pi}{2}$ 사이에 있다. 따라서 늘어난 양(extension)은

$$L - 2\pi = 2\sqrt{x^2 - 1} - 2\arccos\frac{1}{x}.$$

? **생각해 보기** 띠는 원기둥을 따라 휘어 있다. 왜 직선 부분의 장력이 호 부분의 장력과 같은가?

매끄러운 면에 접촉한 띠의 작은 조각에서, 원기둥이 주는 힘은 면에 수직인 힘뿐이다. 그러므로 띠를 따라 장력이 변하는 것을 상쇄할 힘이 없다. 따라서 장력 T는 띠 전체에서 일정하고, 훅의 법칙을 띠 전체에 적용할 수 있다.

$$T = \frac{\lambda\,(L - 2\pi)}{2\pi}.$$

(원기둥이 거칠다면 호를 따라 장력이 변할 수 있으므로 이 단계는 성립하지 않는다.)

입자의 평형

입자에는 무게 mg와, PA와 PB 방향의 장력 T가 작용하며, 각 장력은 연직 위 방향과 각 β를 이룬다. 수평 성분은 대칭성에 의해 상쇄된다. 연직 방향으로 분해하면

$$2T\cos\beta = mg, \qquad \text{이때} \qquad \cos\beta = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x},$$

따라서

$$T = \frac{mgx}{2\sqrt{x^2-1}}.$$

$x = 2$인 경우

이때 $\cos\alpha = \frac{1}{2}$이므로 $\alpha = \frac{\pi}{3}$이고, $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{3}$이다. 늘어난 길이는

$$L = 2\sqrt{3} + 2\pi - \frac{2\pi}{3} = 2\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3}, \qquad \text{따라서} \qquad L - 2\pi = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}.$$

장력은 $T = \dfrac{2mg}{2\sqrt{3}} = \dfrac{mg}{\sqrt{3}}$이다. 훅의 법칙에 의해

$$\lambda = \frac{2\pi T}{L-2\pi} = \frac{2\pi mg/\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 2\pi/3} = \frac{2\pi mg}{6 - 2\pi/\sqrt{3}} = \frac{\pi mg}{3 - \pi/\sqrt{3}},$$

이고, 분자와 분모에 $\sqrt{3}$을 곱하면

$$\boxed{\lambda = \frac{\sqrt{3}\,\pi\, mg}{3\sqrt{3} - \pi} \approx 2.65\, mg.}$$

검산

- $x \to 1^+$일 때 $\arccos(1/x) \to 0$이고 $\sqrt{x^2-1} \to 0$이므로 $L \to 2\pi$이다. 즉 띠가 원기둥의 바닥에 겨우 닿으며 늘어나지 않은 상태가 되는데, 이는 당연히 그래야 한다. 한편 $T \to \infty$인데, 이는 거의 수평인 두 끈이 무게를 지탱하려면 매우 큰 장력이 필요하다는 사실과 맞아떨어진다.
- $x = 2$일 때 $L = 2\sqrt{3} + 4\pi/3 \approx 7.653$으로, $2\pi \approx 6.283$보다 조금 크다. 또한 λ는 mg와 같이 힘의 단위를 가진다.
- 독립적인 확인으로, $\lambda \approx 2.6484\, mg$일 때 전체 퍼텐셜 에너지(potential energy) $-mgx + \lambda(L-2\pi)^2/(4\pi)$를 수치적으로 최소화하였다. 최솟값은 $x = 2$에서 나타나므로, 기하적 계산과 장력 계산이 모두 확인된다.

흔한 실수

- 직선 부분을 P에서 수평 지름의 양 끝까지로 잡는 것. 띠는 접선 방향으로 떠나므로, 축의 높이보다 아래에서, 연직 아래 방향으로부터 각 $\alpha = \arccos(1/x)$인 곳에서 떨어져 나온다.
- 훅의 법칙에 직선 부분 하나의 늘어난 양을 쓰는 것. 장력이 균일하므로, 띠 전체의 늘어난 양 $L - 2\pi$를 전체 자연 길이 2π로 나누어야 한다.

STEP 너머

매끄러운 면을 따라 장력이 일정하다는 주장은 캡스턴 방정식(capstan equation)에서 마찰이 없는 경우이다. 마찰 계수(coefficient of friction)가 μ이면, 각 θ만큼 감긴 부분에서 장력은 최대 $e^{\mu\theta}$배까지 변할 수 있다. 기둥에 몇 번 감은 밧줄로 배를 붙잡아 둘 수 있는 것은 이 때문이다. 위의 에너지 검산은 또한 역학을 변분(variational) 관점에서 보는 첫 맛보기이기도 하다. 이 관점에서 평형(equilibrium)은 퍼텐셜 에너지의 정류점(stationary point)이다. 이런 관점에서 힘, 마찰, 퍼텐셜 에너지를 다루는 대학 1학년 수준의 교재로는 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.