풀이

STEP I 1987, 문제 1

순수수학 • 곡선 그리기

> **STEP I 1987, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q1

핵심 아이디어

곱의 미분법(product rule)으로 미분하면 절대 0이 되지 않는 인수 e^{ax}에 $\cos bx$와 $\sin bx$의 일차결합을 곱한 꼴이 남는다. 따라서 정류점(stationary point)은 하나의 방정식 $\tan bx = \text{constant}$에서 나오며, 그 해들은 π/b의 일정한 간격으로 놓인다. 한 해에서 다음 해로 넘어가면 지수함수 부분에는 일정한 인수가 곱해지고 코사인의 부호는 바뀌는데, 이것이 바로 등비수열(geometric progression)이다.

풀이

정류점

곱의 미분법에 의해

$$\mathrm{f}'(x) = a\mathrm{e}^{ax}\cos bx - b\mathrm{e}^{ax}\sin bx = \mathrm{e}^{ax}(a\cos bx - b\sin bx).$$

모든 x에 대하여 $\mathrm{e}^{ax} > 0$이므로, $\mathrm{f}'(x) = 0$일 필요충분조건은 $a\cos bx = b\sin bx$이다.

> ? **생각해 보기** 여기서 $\cos bx$로 나누어도 괜찮은가?

괜찮다. 만약 $\cos bx = 0$이면 $\sin bx = \pm 1$이고, 방정식은 $0 = \pm b$가 되는데, $b > 0$이므로 이는 거짓이다. 따라서 모든 정류점에서 $\cos bx \neq 0$이고, 양변을 나누면

$$\tan bx = \frac{a}{b}.$$

$\alpha = \arctan(a/b)$라 하자. $a/b > 0$이므로 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$이다. tan의 주기(period)는 π이므로 해는 $bx = \alpha + n\pi$이고, 따라서 정류점은

$$x_n = \frac{\alpha + n\pi}{b}, \qquad n \in \mathbb{Z}, \qquad \text{여기서 } \tan\alpha = \frac{a}{b}.$$

에 있다. 두 변의 길이가 a와 b인 직각삼각형을 생각하면 $\cos\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$이다. $\cos(\theta + n\pi) = (-1)^n \cos\theta$이므로 그 점에서 f의 값은

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x_n) &= \mathrm{e}^{a(\alpha+n\pi)/b}\cos(\alpha+n\pi) \\ &= (-1)^n \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathrm{e}^{a\alpha/b}\,\mathrm{e}^{na\pi/b}. \end{aligned}$$

극대인가 극소인가? 한 번 더 미분하면

$$\mathrm{f}''(x) = \mathrm{e}^{ax}((a^2-b^2)\cos bx - 2ab\sin bx).$$

정류점에서는 $b\sin bx = a\cos bx$이므로 $2ab\sin bx = 2a^2\cos bx$이고

$$\mathrm{f}''(x_n) = \mathrm{e}^{ax_n}\cos bx_n\,(a^2-b^2-2a^2) = -(a^2+b^2)\,\mathrm{f}(x_n).$$

따라서 x_n은 $\mathrm{f}(x_n) > 0$일 때(n이 짝수) 극대(maximum)이고 $\mathrm{f}(x_n) < 0$일 때(n이 홀수) 극소(minimum)이다. 정류점은 극대, 극소, 극대, ...순으로 번갈아 나타난다.

등비수열

$0 < \alpha < \pi$이므로 $x_n > 0$일 필요충분조건은 $n \geq 0$이다. 따라서 $x > 0$인 정류점은 $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$이고, 각 $n \geq 0$에 대하여

$$\frac{\mathrm{f}(x_{n+1})}{\mathrm{f}(x_n)} = \frac{\mathrm{e}^{a(\alpha+(n+1)\pi)/b}\cos(\alpha+(n+1)\pi)}{\mathrm{e}^{a(\alpha+n\pi)/b}\cos(\alpha+n\pi)} = \mathrm{e}^{a\pi/b}\cdot(-1) = -\mathrm{e}^{a\pi/b},$$

이다. 여기서 $\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$와 $\cos(\alpha+n\pi) \neq 0$을 사용하였다. 이 비는 n에 의존하지 않으므로, 값 $\mathrm{f}(x_0), \mathrm{f}(x_1), \ldots$은 첫째항(first term)이 $\dfrac{b\,\mathrm{e}^{a\alpha/b}}{\sqrt{a^2+b^2}}$이고 공비(common ratio)가 $-\mathrm{e}^{a\pi/b}$인 등비수열을 이룬다. 이로써 요구한 결과가 증명되었다.

(같은 계산은 음수 n에 대해서도 성립하므로, 사실 모든 정류값은 양방향으로 뻗은 하나의 등비수열을 이룬다. $x > 0$이라는 제한은 단지 자연스러운 첫째항을 정해 줄 뿐이다.)

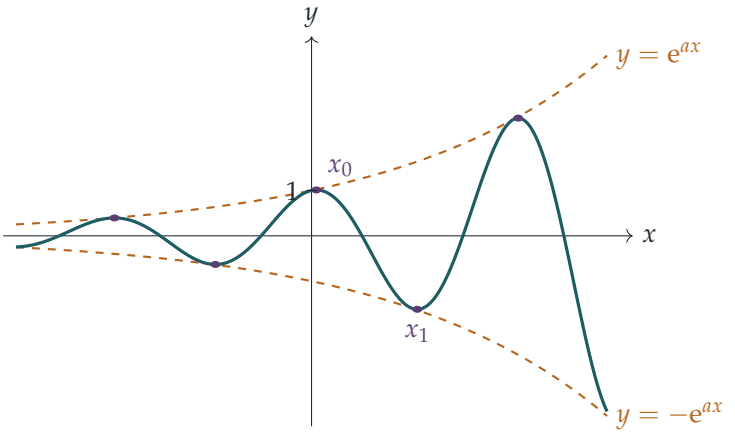
그래프 개형

필요한 사실은 다음과 같다.

- $-1 \leq \cos bx \leq 1$이므로 그래프는 곡선 $y = \mathrm{e}^{ax}$와 $y = -\mathrm{e}^{ax}$ 사이에 놓인다. 그래프는 $\cos bx = 1$인 곳($bx = 2m\pi$)에서 $y = \mathrm{e}^{ax}$에 닿고, $\cos bx = -1$인 곳($bx = (2m+1)\pi$)에서 $y = -\mathrm{e}^{ax}$에 닿는다. 이 점들에서는 $\sin bx = 0$이므로 $\mathrm{f}'(x) = \pm a\mathrm{e}^{ax}$로 포락선(envelope)의 기울기와 같다. 즉 곡선은 그 점에서 포락선에 접할 뿐, 방향을 바꾸지는 않는다.

- 영점은 $bx = \frac{\pi}{2} + m\pi$에 π/b 간격으로 있으며, $f(0) = 1$이다.
- $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$이므로 각 극값점(turning point) $bx = \alpha + n\pi$는 대응하는 접점 $bx = n\pi$의 바로 뒤에 있다. 증가하는 포락선이 각 봉우리를 오른쪽으로 조금씩 끌어당기는 것이다.
- $x \to \infty$일 때 진동은 한없이 커진다. $x \to -\infty$일 때는 $e^{ax} \to 0$이므로, 그래프는 계속 진동하면서 $f(x) \to 0$이 된다.

아래 그림은 $a = 0.3$, $b = 2$인 경우이며, 포락선 $y = \pm e^{ax}$는 점선으로 나타내었다.



검산

- $a = b = 1$로 두면 $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$이고 $f(x_0) = e^{\pi/4}/\sqrt{2} \approx 1.551$이며, $f(x_1) = e^{5\pi/4}\cos\frac{5\pi}{4} \approx -35.89$이다. 비는 $\approx -23.14 = -e^{\pi}$이다.
- $a \to 0$이면 함수는 $\cos bx$가 된다. 이때 $\alpha \to 0$이고 극값점은 $bx = n\pi$로 옮겨 가며, 비는 -1로 수렴하여 익숙한 $1, -1, 1, \ldots$을 얻는다.
- 무작위로 고른 500개의 쌍 (a, b)에 대하여 $f'(x_n) = 0$, $f(x_n)$이 위의 공식과 일치함, $f''(x_n) = -(a^2 + b^2)f(x_n)$, 연속한 비가 $-e^{a\pi/b}$와 같음, 그리고 f'이 다른 영점을 갖지 않음을 수치적으로 확인하였다.

흔한 실수

- 극값점을 곡선이 포락선에 닿는 곳, 즉 $bx = n\pi$에 두는 것. 그 점들에서의 기울기는 $\pm ae^{ax} \neq 0$이며, 극값점은 그보다 조금 오른쪽에 있다.
- $bx = \alpha$만 택하고 $\tan bx = a/b$의 일반해(general solution) $bx = \alpha + n\pi$를 잊는 것.

- 비의 음의 부호를 빠뜨리는 것. 연속한 정류점 사이에서 코사인의 부호가 바뀌므로 값은 극대, 극소로 번갈아 나타난다.

STEP 너머

함수 $e^{ax}\cos bx$는 $e^{(a+ib)x}$의 실수부(real part)이며, 이런 함수들은 바로 특성방정식(auxiliary equation)이 복소근을 갖는 선형 미분방정식(linear differential equation) $y'' + py' + qy = 0$의 해이다. $a < 0$이면 감쇠 진동(damped oscillation)이 나타나고(마찰이 있는 진자의 흔들림), 여기처럼 $a > 0$이면 진동이 점점 커지는 불안정한 계가 된다. 연속한 봉우리들은 일정한 비를 이루며, 그 비의 로그를 공학자들은 로그 감쇠율(logarithmic decrement)이라 부른다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(미분방정식 입문)는 2계 선형 방정식을 다루는 장에서 이 내용을 전개하고, Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 $e^{(a+ib)x}$를 곱하는 것이 왜 나선을 그리는지 보여준다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.