풀이

STEP III 2025, 문제 9

역학 • 질량중심

> **STEP III 2025, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 11.8 절 **기울어진 평형**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/tilted-equilibria.html

핵심 아이디어

탁자 위에 놓인 입체는 한 점에서 탁자와 닿고, 작용하는 힘은 두 가지뿐이다. 질량중심(centre of mass) G에 작용하는 무게(weight)와 접촉점에 작용하는 반력(reaction)이다. 이 두 힘은 같은 연직선 위에서 작용할 때에만 평형을 이룰 수 있으므로, 접촉점에서 곡면에 그은 법선(normal)은 반드시 G를 지나야 한다. 소문항 (i)에서는 G의 위치를 구하고, 소문항 (ii)에서는 곡면의 법선이 축과 어디에서 만나는지 알아내며, 소문항 (iii)에서는 이 둘을 결합한다. 즉 곡면 위의 점 가운데 법선이 G를 지나는 점의 개수를 센다.

풀이

이 풀이 전체에서 곡선을 $0 \le x \le r$에 대하여 $y = \dfrac{r^n - x^n}{r^{n-1}}$로 쓴다. 이 곡선은 y축 위의 점 $(0, r)$에서 x축 위의 점 $(r, 0)$까지 내려가며, 그 사이에서 $y \ge 0$이다.

소문항 (i)

입체를 y축을 중심으로 하는 얇은 원통 껍질(cylindrical shell)로 자른다. 반지름 x, 두께 δx, 높이 y인 껍질의 부피는 $2\pi x y\,\delta x$이고, 밀도(density)가 균일하므로 그 질량중심은 높이 $\frac{1}{2}y$에 있다. 따라서 부피와 xz평면에 대한 모멘트(moment)는 다음과 같다.

$$V = 2\pi \int_0^r x y \,\mathrm{d}x, \qquad V\bar{y} = 2\pi \int_0^r x \cdot \tfrac{1}{2}y^2 \,\mathrm{d}x.$$

첫 번째 적분은

$$\int_0^r x\,\frac{r^n - x^n}{r^{n-1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{r^{n-1}}\left(\frac{r^{n+2}}{2} - \frac{r^{n+2}}{n+2}\right) = \frac{n\,r^3}{2(n+2)},$$

이므로 $V = \dfrac{\pi n r^3}{n+2}$이다. 두 번째 적분은 $(r^n - x^n)^2$을 전개하여 계산한다.

$$\begin{aligned}\int_0^r x\,\frac{(r^n - x^n)^2}{r^{2n-2}}\,\mathrm{d}x &= \frac{r^{2n+2}}{r^{2n-2}}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{2n+2}\right)\\ &= r^4 \cdot \frac{(n+2)^2 - 4(n+1)}{2(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 r^4}{2(n+1)(n+2)},\end{aligned}$$

따라서 $V\bar{y} = \pi \cdot \dfrac{n^2 r^4}{2(n+1)(n+2)}$이다. 나누면

$$\bar{y} = \frac{\pi n^2 r^4}{2(n+1)(n+2)} \cdot \frac{n+2}{\pi n r^3} = \frac{nr}{2(n+1)},$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다. 대칭성에 의해 질량중심은 y축 위에 있다.

소문항 (ii)

미분하면 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{nx^{n-1}}{r^{n-1}}$이고, $x = rp$에서 이 값은 $-np^{n-1}$이다. $p > 0$이므로 이 값은 0이 아니며, 따라서 법선의 기울기(gradient)는 $\dfrac{1}{np^{n-1}}$이고 법선의 방정식은

$$y - r(1 - p^n) = \frac{x - rp}{np^{n-1}}.$$

이다. $x = 0$을 대입하면

$$Y = r(1 - p^n) - \frac{rp}{np^{n-1}} = r\left(1 - p^n - \frac{1}{np^{n-2}}\right),$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

$n = 4$일 때 $Y(p) = r\left(1 - p^4 - \frac{1}{4}p^{-2}\right)$이고

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}p} = r\left(-4p^3 + \frac{1}{2p^3}\right) = \frac{r(1 - 8p^6)}{2p^3}.$$

이다.

> **생각해 보기** 정류점(stationary point)이 단지 국소적인 최댓값이 아니라 전체에서 가장 큰 값을 준다는 것을 어떻게 알 수 있는가?

$p > 0$일 때 $\mathrm{d}Y/\mathrm{d}p$의 부호는 $1 - 8p^6$의 부호와 같다. 즉 $p^6 < \frac{1}{8}$이면 양수이고 $p^6 > \frac{1}{8}$이면 음수이다. 따라서 Y는 $p^6 = \frac{1}{8}$, 즉 $p^2 = \frac{1}{2}$, $p = 1/\sqrt{2}$($(0, 1]$에 속한다)까지 증가하고 그 뒤로는 감소한다. 그러므로 이 값은 구간 전체에서 최댓값이다.

$$Y_{\max} = r\left(1 - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\cdot 2\right) = \tfrac{1}{4}r.$$

소문항 (iii)

두 조각. 위쪽 경계 $r^3y = r^4 - x^4$는 소문항 (i)의 곡선에서 $n = 4$인 경우이므로, 위쪽 조각($y = 0$ 위쪽)은 소문항 (i)의 입체에서 $n = 4$인 경우이다. 아래쪽 경계 $ry = -(r^2 - x^2)$는 $n = 2$인 곡선 $ry = r^2 - x^2$를 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로, 아래쪽 조각은 $n = 2$인 입체를 뒤집어 놓은 것이다. 두 조각은 평면 $y = 0$ 위의 반지름 r인 원형 테두리에서 만난다. 소문항 (i)의 $V = \pi nr^3/(n+2)$를 이용하면 다음을 얻는다.

	부피	질량중심의 높이
위쪽 ($n = 4$)	$\frac{2}{3}\pi r^3$	$\frac{4r}{10} = \frac{2}{5}r$
아래쪽 ($n = 2$, 대칭이동)	$\frac{1}{2}\pi r^3$	$-\frac{2r}{6} = -\frac{1}{3}r$

(앞에서처럼 밀도가 균일하다고 가정하고) 모멘트를 계산하면

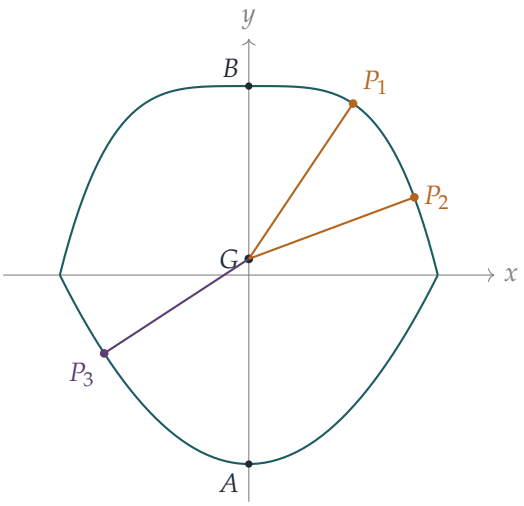
$$\bar{y} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}r - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}r}{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{10}r}{\frac{7}{6}} = \frac{3r}{35},$$

이므로 $G = \left(0, \frac{3}{35}r\right)$이고, 이는 테두리보다 약간 위에 있다.

평형 조건.

? **생각해 보기** 접촉점에서의 법선은 왜 반드시 G를 지나야 하는가?

입체가 한 점 P에서 곡면으로 놓여 있을 때, 입체에 작용하는 힘은 G에서 연직 방향으로 작용하는 무게와 P에서 작용하는 면의 반력뿐이다. 두 힘은 크기가 같고 방향이 반대이며 같은 직선 위에 있을 때에만 평형을 이루므로, G는 P의 바로 위에 있어야 한다. 탁자 면은 P에서의 접평면(tangent plane)이므로, P를 지나는 연직선은 그 점에서 입체에 그은 법선이다. 즉 P에서의 법선은 G를 지나야 한다. 역으로 법선이 G를 지나면 입체는 그곳에서 정지해 있을 수 있다. 입체가 볼록(convex)하므로(단면 곡선 $y = r - x^4/r^3$는 오목(concave)하고 $y = (x^2 - r^2)/r$는 볼록하다) P에서의 접평면의 한쪽에 입체 전체가 놓이기 때문이다. 회전면(surface of revolution)의 법선은 축을 포함하는 평면 위에 있으므로, xy평면에 의한 단면(cross-section)만 살펴보면 된다. G가 축 위에 있으므로, y축과 $Y = \frac{3}{35}r$에서 만나는 법선을 찾으면 된다.



위쪽 곡면에서의 접촉. $n = 4$일 때 소문항 (ii)에 의해($r(1-p^4)$는 그 점의 높이이다) 점 $\big(rp, r(1-p^4)\big)$에서의 법선은 축과 $r\big(1-p^4-\frac{1}{4}p^{-2}\big)$에서 만난다. 이 값을 $\frac{3}{35}r$와 같다고 놓고 양변에 $140p^2$을 곱하면

$$140p^2 - 140p^6 - 35 = 12p^2 \iff h(q) := 140q^3 - 128q + 35 = 0, \quad q = p^2.$$

이다. 이제 $h(0) = 35 > 0$, $h(\frac{1}{2}) = 17.5 - 64 + 35 = -11.5 < 0$, $h(1) = 47 > 0$이다. 따라서 h는 근 $q_1 \in (0, \frac{1}{2})$과 근 $q_2 \in (\frac{1}{2}, 1)$를 가지며, 이로부터 $0 < p_1 < 1/\sqrt{2} < p_2 < 1$인 위쪽 곡면 위의 두 점 P_1, P_2를 얻는다. (이는 소문항 (ii)가 예측하는 바와 같다. $\frac{3}{35}r$는 최댓값 $\frac{1}{4}r$보다 작으므로, 이 값은 최댓값의 양쪽에서 한 번씩 나타난다.)

아래쪽 곡면에서의 접촉. $n = 2$인 곡선에서 매개변수 p에 해당하는 점의 법선은 축과 $r(1-p^2-\frac{1}{2}) = r(\frac{1}{2}-p^2)$에서 만난다. 이를 x축에 대하여 대칭이동하면, 아래쪽 곡면 위의 점 $\big(rp, -r(1-p^2)\big)$에서의 법선은 축과 $r(p^2-\frac{1}{2})$에서 만난다. 이 값을 $\frac{3}{35}r$와 같다고 놓으면

$$p^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{35} = \tfrac{41}{70}, \qquad p_3 = \sqrt{41/70} \in (0,1),$$

이 되어 세 번째 점 P_3를 얻는다(지금 사용하는 반쪽 단면에서는 $p > 0$이므로 양의 근을 택한다. 그림에는 이 점의 대칭점이 나타나 있는데, 대칭성에 의해 둘은 동등하다).

세 각은 서로 다르며 0이 아니다. 입체가 P에서 정지해 있을 때, 위쪽 연직 방향은 P에서 G를 향하는 방향, 즉 P에서의 안쪽 법선 방향이다.

- 아래쪽의 P_3에서 안쪽 법선 $(-2p_3, 1)$(곡선의 기울기는 $2p_3$이다)은 위를 향하며, 양의 y축 방향을 가리키는 $\overrightarrow{AB}$와 예각 $\arctan(2p_3)$를 이룬다.

- 위쪽의 P_1 또는 P_2에서 안쪽 법선 $(-4p^3, -1)$은 아래를 향하므로, $\overrightarrow{AB}$와 이루는 각은 둔각 $180^\circ - \arctan(4p^3)$이다.

$p_1 \neq p_2$이고 $\arctan(4p^3)$는 순증가하므로 두 둔각은 서로 다르며, 둘 다 예각과도 다르다. $p_1, p_2, p_3 > 0$이므로 어느 각도 0이 아니다. 따라서 입체는 $\overrightarrow{AB}$가 위쪽 연직 방향과 0이 아닌 서로 다른 세 각을 이루도록 평형(equilibrium) 상태로 놓일 수 있으며, 이로써 요구된 결과가 증명된다.

(사실 평형 위치는 이보다 더 많다. 입체는 테두리로 서서 균형을 이룰 수도 있고, $\overrightarrow{AB}$가 바로 아래를 향하도록 B로 서서 균형을 이룰 수도 있다. 문제에서 요구하는 것은 곡면 위의 세 위치로 충분하다.)

검산

- 소문항 (i)에서 $n = 2$로 두면 높이 r인 포물면(paraboloid)에 대하여 $\frac{1}{3}r$를 얻는다. 이는 속이 찬 포물면의 질량중심이 꼭짓점에서 밑면까지의 3분의 2 지점에 있다는 잘 알려진 결과와 일치한다. $n \to \infty$이면 입체는 높이 r인 원기둥이 되고, 마땅히 그래야 하듯 $\bar{y} \to \frac{1}{2}r$이다.
- 소문항 (ii)에서 $n = 4$, $p = 1$(테두리)이면 $Y = -\frac{1}{4}r$를 얻는다. 그 점에서 기울기는 -4이므로 법선의 기울기는 $\frac{1}{4}$이고, 수평 거리 r 동안 $\frac{1}{4}r$만큼 내려간다. 결과가 일치한다.
- $r = 1$일 때 근은 $p_1 \approx 0.552$, $p_2 \approx 0.876$, $p_3 \approx 0.765$이고, 각은 약 $146.1^\circ, 110.4^\circ, 56.8^\circ$이다. 탁자 위 G의 높이가 정류하는 기울기를 컴퓨터로 탐색한 결과, 0°와 180° 사이(양 끝 제외)에서 정확히 이 세 개와 테두리 위치(약 85.1°)가 발견되었다.

흔한 실수

- 아래쪽 조각의 질량중심을 $+\frac{1}{3}r$에 두는 것: 이 조각은 $n = 2$인 입체를 뒤집어 놓은 것이므로 질량중심은 테두리보다 아래에 있다.
- x를 y의 $\frac{2}{n}$ 거듭제곱으로 나타낸 채 원판(disc)의 부피 $\pi x^2\,\delta y$를 사용하는 것: 이 방법도 통하지만, 껍질 방법을 쓰면 다항식의 적분이 된다.
- $q = p^2$에 대한 3차식(cubic)을 구하고도 $0 < p < 1$인 근이 두 개 있음을 정당화하지 않는 것: $q = 0, \frac{1}{2}, 1$에서 부호를 확인하면 해결된다.

STEP 너머

법선이 G를 지난다는 조건은 물체가 구를 때 G의 높이가 정류한다는 뜻이며, 그 높이가 곧 위치 에너지(potential energy)이다. 안정한 위치는 위치 에너지의 극솟값이고 불안정한 위치는 극댓값이다. 매끄러운 볼록 물체는 적어도 두 개의 평형 위치를 가져야 하는데, 2006년에 발견된 "곰보츠(Gömböc)"는 안정한 위치와 불안정한 위치를 각각 하나씩만 갖는 볼록한 도형이다. 위치 에너지와 안정성(stability)의 일반적인 이론은 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에 나와 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.