풀이

STEP III 2025, 문제 8

순수수학 • 복소수를 이용한 삼각함수의 합

> **STEP III 2025, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

핵심 아이디어

(i)의 항등식(identity)은 점화식(recurrence)이다. 즉 $z^{m+1} - z^{-(m+1)}$을 두 단계 아래의 같은 꼴의 식으로 나타내므로, 이를 반복해서 적용하면 합이 연쇄적으로 소거되며(telescope) 정리된다. $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$로 두면 모든 $z^k \pm z^{-k}$가 $2\cos k\theta$ 또는 $2\mathrm{i}\sin k\theta$가 되어, 대수적 계산이 삼각함수 항등식으로 바뀐다. 수치를 구하는 부분은 $\sin 2n\theta$가 $\sin\theta$(또는 $\cos\theta$)와 같아져 약분되도록 θ를 고르면 얻어진다.

풀이

소문항 (i)

곱을 전개하면

$$\left(z - \frac{1}{z}\right)\left(z^m + \frac{1}{z^m}\right) = z^{m+1} + z^{1-m} - z^{m-1} - z^{-(m+1)}.$$

여기에 $z^{m-1} - z^{1-m}$을 더하면 가운데 두 항이 소거되고 $z^{m+1} - z^{-(m+1)}$이 남으므로, 구하는 항등식이 성립한다.

수학적 귀납법(*induction*). $n = 1$일 때 주장은 $z^2 - z^{-2} = (z - z^{-1})(z + z^{-1})$이고, 이는 제곱의 차(difference of two squares)이므로 성립한다. 어떤 $n \geq 1$에 대하여 성립한다고 가

정하자. $m = 2n+1$로 두고 항등식을 쓰면($m+1 = 2n+2$, $m-1 = 2n$이다)

$$\begin{aligned} z^{2n+2} - \frac{1}{z^{2n+2}} &= \left(z - \frac{1}{z}\right)\left(z^{2n+1} + \frac{1}{z^{2n+1}}\right) + \left(z^{2n} - \frac{1}{z^{2n}}\right) \\ &= \left(z - \frac{1}{z}\right)\left(z^{2n+1} + \frac{1}{z^{2n+1}}\right) + \left(z - \frac{1}{z}\right)\sum_{r=1}^{n}\left(z^{2r-1} + \frac{1}{z^{2r-1}}\right) \\ &= \left(z - \frac{1}{z}\right)\sum_{r=1}^{n+1}\left(z^{2r-1} + \frac{1}{z^{2r-1}}\right), \end{aligned}$$

이다. 둘째 줄은 귀납 가정(inductive hypothesis)에 의한 것이고, 마지막 줄은 추가된 항이 $r = n+1$인 항이기 때문이다. 따라서 결과는 $n+1$일 때도 성립하고, 수학적 귀납법에 의해 모든 $n \geq 1$에 대하여 성립한다.

$z + \frac{1}{z}$를 쓰는 경우. 같은 방법으로

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z^m - \frac{1}{z^m}\right) = z^{m+1} - z^{1-m} + z^{m-1} - z^{-(m+1)},$$

이므로 이번에는 $z^{m-1} - z^{1-m}$을 **빼야** 한다.

$$z^{m+1} - \frac{1}{z^{m+1}} = \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z^m - \frac{1}{z^m}\right) - \left(z^{m-1} - \frac{1}{z^{m-1}}\right).$$

이 빼기 부호 때문에 한 단계씩 내려갈 때마다 부호가 번갈아 바뀌며, 다음이 성립한다고 주장한다.

$$z^{2n} - \frac{1}{z^{2n}} = \left(z + \frac{1}{z}\right)\sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}\left(z^{2r-1} - \frac{1}{z^{2r-1}}\right).$$

$n = 1$일 때 이는 역시 $(z+z^{-1})(z-z^{-1})$이다. n일 때 성립하면, $m = 2n+1$로 둔 항등식에서

$$z^{2n+2} - \frac{1}{z^{2n+2}} = \left(z + \frac{1}{z}\right)\left[\left(z^{2n+1} - \frac{1}{z^{2n+1}}\right) - \sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}\left(z^{2r-1} - \frac{1}{z^{2r-1}}\right)\right],$$

를 얻는다. $-(-1)^{n-r} = (-1)^{n+1-r}$이고 첫째 항은 부호가 $(-1)^0 = 1$인 $r = n+1$ 항이므로, 대괄호 안은 정확히 $\sum_{r=1}^{n+1}(-1)^{n+1-r}(z^{2r-1} - z^{-(2r-1)})$이다. 이로써 귀납법이 완성된다. 풀어 쓰면 다음과 같다.

$$z^{2n} - \frac{1}{z^{2n}} = \left(z + \frac{1}{z}\right)\left[\left(z^{2n-1} - \frac{1}{z^{2n-1}}\right) - \left(z^{2n-3} - \frac{1}{z^{2n-3}}\right) + \cdots \pm \left(z - \frac{1}{z}\right)\right].$$

소문항 (ii)

(a) $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$로 두면 $z^k + z^{-k} = 2\cos k\theta$이고 $z^k - z^{-k} = 2\mathrm{i}\sin k\theta$이다. (i)의 첫 번째 결과는

$$2\mathrm{i}\sin 2n\theta = 2\mathrm{i}\sin\theta\sum_{r=1}^{n} 2\cos(2r-1)\theta,$$

가 되고, 양변을 2i로 나누면 구하는 대로 $\sin 2n\theta = 2\sin\theta\sum_{r=1}^{n}\cos(2r-1)\theta$를 얻는다.

(b) $n=2$로 두면 $\sin 4\theta = 2\sin\theta(\cos\theta+\cos 3\theta)$이다. $\sin 4\theta$가 $\sin\theta$와 같기를 원하는데, $\sin\frac{4}{5}\pi = \sin(\pi-\frac{1}{5}\pi) = \sin\frac{1}{5}\pi$이므로 $\theta=\frac{1}{5}\pi$가 이를 만족한다. $\sin\frac{1}{5}\pi \neq 0$이므로 이것으로 나눌 수 있다.

$$1 = 2(\cos\tfrac{1}{5}\pi + \cos\tfrac{3}{5}\pi).$$

그런데 $\cos\frac{3}{5}\pi = -\cos(\pi-\frac{3}{5}\pi) = -\cos\frac{2}{5}\pi$이므로 $\cos\frac{1}{5}\pi - \cos\frac{2}{5}\pi = \frac{1}{2}$, 즉 $\cos\frac{2}{5}\pi = \cos\frac{1}{5}\pi - \frac{1}{2}$이다.

(c) $n=7, \theta=\frac{1}{15}\pi$로 두면 이번에도 $\sin 14\theta = \sin(\pi-\theta) = \sin\theta \neq 0$이므로

$$\sum_{r=1}^{7} \cos\frac{(2r-1)\pi}{15} = \frac{1}{2}.$$

생각해 보기 여기 나온 일곱 개의 각은 $\frac{1}{15}\pi$의 홀수 배인데, 목표 식에는 짝수 배가 들어 있다. 한쪽에서 다른 쪽으로 어떻게 넘어갈까?

$\frac{1}{2}\pi$보다 큰 각에 $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$를 쓰고, $\cos\frac{5}{15}\pi = \cos\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$이며 $\cos\frac{3}{15}\pi = \cos\frac{1}{5}\pi$임에 주목한다.

$$\cos\tfrac{9}{15}\pi = -\cos\tfrac{2}{5}\pi, \qquad \cos\tfrac{11}{15}\pi = -\cos\tfrac{4}{15}\pi, \qquad \cos\tfrac{13}{15}\pi = -\cos\tfrac{2}{15}\pi.$$

합은 다음과 같이 된다.

$$\cos\tfrac{1}{15}\pi + \cos\tfrac{7}{15}\pi - \cos\tfrac{2}{15}\pi - \cos\tfrac{4}{15}\pi + \tfrac{1}{2} + (\cos\tfrac{1}{5}\pi - \cos\tfrac{2}{5}\pi) = \tfrac{1}{2}.$$

(b)에 의해 괄호 안은 $\frac{1}{2}$이므로

$$\cos\tfrac{2}{15}\pi + \cos\tfrac{4}{15}\pi - \cos\tfrac{7}{15}\pi - \cos\tfrac{1}{15}\pi = \tfrac{1}{2}.$$

마지막으로 $-\cos\frac{7}{15}\pi = \cos(\pi-\frac{7}{15}\pi) = \cos\frac{8}{15}\pi$이고 $-\cos\frac{1}{15}\pi = \cos(\pi+\frac{1}{15}\pi) = \cos\frac{16}{15}\pi$이므로

$$\cos\tfrac{2}{15}\pi + \cos\tfrac{4}{15}\pi + \cos\tfrac{8}{15}\pi + \cos\tfrac{16}{15}\pi = \tfrac{1}{2},$$

가 되어 증명이 끝난다.

소문항 (iii)

생각해 보기 목표 식은 θ의 홀수 배에 대한 사인 값들의 교대합이다. (i)의 어느 결과가 정확히 그런 꼴을 만들어 낼까?

$z+\frac{1}{z}$를 쓰는 경우이다. $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$로 두면

$$2\mathrm{i}\sin 2n\theta = 2\cos\theta\sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}\,2\mathrm{i}\sin(2r-1)\theta,$$

이므로

$$\sin 2n\theta = 2\cos\theta \sum_{r=1}^{n} (-1)^{n-r} \sin(2r-1)\theta.$$

$n = 3$으로 두면

$$\sin 6\theta = 2\cos\theta\,(\sin 5\theta - \sin 3\theta + \sin\theta).$$

이제 $\sin 6\theta = \cos\theta$이기를 원하는데, $\theta = \frac{1}{14}\pi$가 이를 만족한다. 실제로 $\sin\frac{6}{14}\pi = \cos(\frac{1}{2}\pi - \frac{6}{14}\pi) = \cos\frac{1}{14}\pi$이고, 이 값은 0이 아니다. 이것으로 나누면

$$\sin\tfrac{1}{14}\pi - \sin\tfrac{3}{14}\pi + \sin\tfrac{5}{14}\pi = \tfrac{1}{2}.$$

검산

- 간단한 값에서 항등식을 확인해 본다. $z = 2, n = 2$이면 $16 - \frac{1}{16} = \frac{255}{16}$이고, $(2 - \frac{1}{2})(2 + \frac{1}{2} + 8 + \frac{1}{8}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{85}{8} = \frac{255}{16}$이며 $(2 + \frac{1}{2})(8 - \frac{1}{8} - 2 + \frac{1}{2}) = \frac{5}{2} \cdot \frac{51}{8} = \frac{255}{16}$이다.
- 수치로 계산하면 $\cos\frac{2}{5}\pi = 0.309017\ldots$와 $\cos\frac{1}{5}\pi - \frac{1}{2} = 0.809017\ldots - 0.5$가 일치한다. 이는 잘 알려진 $\cos\frac{1}{5}\pi = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, $\cos\frac{2}{5}\pi = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$이다.
- (ii)(c)와 (iii)의 합은 계산기로 계산하면 둘 다 0.500000이 나온다.

흔한 실수

- $z + \frac{1}{z}$ 점화식에서 부호를 잘못 쓰는 것. 아래 단계의 항은 빼는 것이므로 합은 부호가 번갈아 바뀌며, 가장 위의 항 $z^{2n-1} - z^{-(2n-1)}$에는 $+$ 부호가 붙어야 한다.
- 선택한 각에서 $\sin\theta$나 $\cos\theta$가 0이 아님을 밝히지 않고 그것으로 나누는 것.
- (ii)(c)에서 $\cos\frac{5}{15}\pi = \frac{1}{2}$임을 잊거나, 남은 두 항을 정리하는 데 (b)가 필요하다는 것을 놓치는 것.

STEP 너머

$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$일 때 식 $z^k + z^{-k}$는 $2\cos k\theta$이며, (i)과 같은 점화식은 바로 체비쇼프(Chebyshev) 다항식(Chebyshev polynomials)이 만족하는 점화식이다. 체비쇼프 다항식은 $\cos k\theta$와 $\sin k\theta / \sin\theta$를 $\cos\theta$에 대한 다항식으로 바꾸어 준다. (ii)(c)와 (iii)의 깔끔한 합은 단위근(roots of unity)에서 비롯된다. 각 $\frac{2}{15}\pi$, $\frac{4}{15}\pi$, $\frac{8}{15}\pi$, $\frac{16}{15}\pi$는 반복해서 두 배를 하여 만들어지는데, 이는 가우스(Gauss)의 주기(Gauss's periods)와 갈루아 이론(Galois theory)을 처음 엿보는 것이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 기하를 살펴보기에 아주 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.