풀이

STEP III 2025, 문제 7

순수수학 • 역탄젠트 함수

> **STEP III 2025, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

핵심 아이디어

모든 것은 하나의 사실에 달려 있다. $(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)=1$이므로 $\mathrm{f}(x)\,\mathrm{f}(-x)=1$이다. 이 사실과 $\mathrm{f}(x)>0$을 함께 쓰면 $\mathrm{g}(x)+\mathrm{g}(-x)$는 익숙한 $\tan^{-1}t+\tan^{-1}(1/t)$의 꼴이 된다. (c)에서 $\tan\frac{1}{2}\theta$는 반각(half-angle) 탄젠트이며, $\tan\theta=1/x$로 두면 이것은 $\mathrm{f}(x)$로 간단해진다. $x>0$에서 g와 k가 일치한다는 것을 알고 나면, (e)의 두 적분은 대칭성으로 서로 연결된다.

풀이

소문항 (i)

$x\neq 0$이면 $x^2=|x|^2$이므로

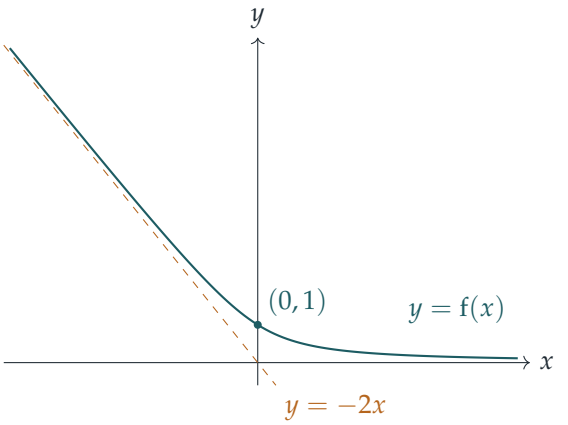
$$\sqrt{x^2+1}=|x|\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{1/2}=|x|\left(1+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x^4}+\cdots\right)=|x|+\frac{1}{2|x|}-\frac{1}{8|x|^3}+\cdots,$$

이다. 여기서 이항급수(binomial series)를 사용했는데, $|x|$가 클 때 $1/x^2<1$이므로 이 전개는 유효하다. $|x|^{-3}$ 차수의 항들을 버리면 요구한 대로 $\sqrt{x^2+1}\approx|x|+\dfrac{1}{2|x|}$를 얻는다.

그래프 그리기. 먼저 사실들을 모아 보자.

- $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\geq x$이므로 모든 x에 대하여 $\mathrm{f}(x)>0$이다. 또한 $\mathrm{f}(0)=1$이다.
- $x<\sqrt{x^2+1}$이므로 $\mathrm{f}'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1<0$이고, 따라서 f는 감소함수(decreasing function)이다. 게다가 $\mathrm{f}''(x)=(x^2+1)^{-3/2}>0$이므로 곡선은 아래로 볼록(convex)하다.

- $x \to +\infty$일 때: $\mathrm{f}(x) \approx x + \frac{1}{2x} - x = \frac{1}{2x} \to 0^+$이므로 x축이 점근선(asymptote)이다.
- $x \to -\infty$일 때: $|x| = -x$이므로 $\mathrm{f}(x) \approx -2x + \frac{1}{2|x|}$이다. 직선 $y = -2x$는 사선 점근선(oblique asymptote)이고, 곡선은 그 바로 위에 놓인다.



소문항 (ii)(a)

제곱의 차(difference of two squares)를 전개하면

$$\mathrm{f}(x)\,\mathrm{f}(-x) = \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) = (x^2+1) - x^2 = 1,$$

이므로 $\mathrm{f}(-x) = 1/\mathrm{f}(x)$이다. $t = \mathrm{f}(x)$로 두면, 소문항 (i)에 의해 t는 양수이다. 그러면

$$\mathrm{g}(x) + \mathrm{g}(-x) = \tan^{-1} t + \tan^{-1}\frac{1}{t}.$$

? **생각해 보기** $\tan^{-1} t + \tan^{-1}(1/t) = \frac{1}{2}\pi$가 성립하려면 왜 $t > 0$이 필요한가?

$\alpha = \tan^{-1} t$라 하자. $t > 0$이므로 $\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$이고, 따라서 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$도 $(0, \frac{1}{2}\pi)$에 속하며 이 구간은 $\tan^{-1}$의 치역 안에 있다. 그 탄젠트 값은 $\cot\alpha = 1/t$이므로 $\tan^{-1}(1/t) = \frac{1}{2}\pi - \alpha$이다. 따라서 $\mathrm{g}(x) + \mathrm{g}(-x) = \frac{1}{2}\pi$이다. ($t < 0$이면 합은 대신 $-\frac{1}{2}\pi$가 되며, 이 때문에 f가 양수라는 사실이 중요하다.)

소문항 (ii)(b)

$\tan^{-1}$은 홀함수(odd function)이므로 $x \neq 0$에 대하여

$$\mathrm{k}(-x) = \tfrac{1}{2}\tan^{-1}\left(-\frac{1}{x}\right) = -\tfrac{1}{2}\tan^{-1}\frac{1}{x} = -\mathrm{k}(x),$$

이고, 이는 $\mathrm{k}(x) + \mathrm{k}(-x) = 0$을 뜻한다.

소문항 (ii)(c)

$x > 0$이고 $\theta = \tan^{-1}(1/x)$라 하면 $\theta \in (0, \frac{1}{2}\pi)$이고 $\mathrm{k}(x) = \frac{1}{2}\theta$이다. 대변이 1이고 이웃변이 x인 직각삼각형을 생각하면 $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$이다. 반각 공식 $\tan\frac{1}{2}\theta = \dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$($1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{1}{2}\theta$와 $\sin\theta = 2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$에서 얻어진다)를 사용하면

$$\tan \mathrm{k}(x) = \frac{1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}} = \sqrt{x^2+1} - x = \mathrm{f}(x) = \tan \mathrm{g}(x).$$

이로써 결과가 증명된다.

더 말할 것이 있다. $x > 0$이면 $\mathrm{k}(x) \in (0, \frac{1}{4}\pi)$이다. 또한 $0 < \mathrm{f}(x) < \mathrm{f}(0) = 1$이므로 $\mathrm{g}(x) \in (0, \frac{1}{4}\pi)$이기도 하다. tan은 이 구간에서 일대일(one-to-one)이므로

$$\mathrm{k}(x) = \mathrm{g}(x) \quad \text{단, } x > 0.$$

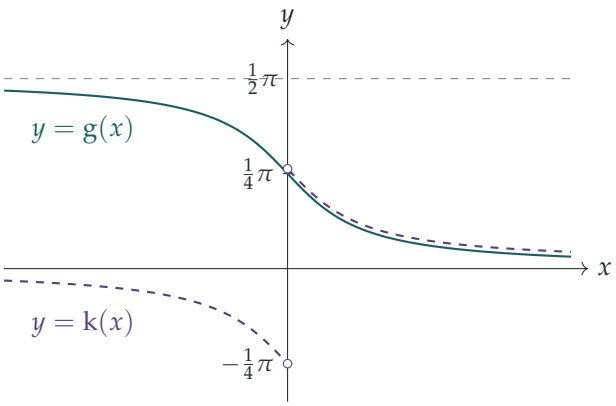
$x < 0$이면 $-x > 0$이므로, (b), 방금 얻은 결과, (a)를 차례로 적용하면

$$\mathrm{k}(x) = -\mathrm{k}(-x) = -\mathrm{g}(-x) = \mathrm{g}(x) - \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{단, } x < 0.$$

소문항 (ii)(d)

$\tan^{-1}$(증가)과 f(감소)가 모두 단조(monotonic)이므로 $\mathrm{g} = \tan^{-1} \circ \mathrm{f}$는 감소함수이다. $x \to -\infty$일 때 $\mathrm{f} \to \infty$이고 $\mathrm{g} \to \frac{1}{2}\pi$이다. $x \to +\infty$일 때 $\mathrm{f} \to 0^+$이고 $\mathrm{g} \to 0$이다. 또한 $\mathrm{g}(0) = \tan^{-1} 1 = \frac{1}{4}\pi$이고, (a)에 의해 그래프는 점 $(0, \frac{1}{4}\pi)$에 대하여 회전대칭(rotational symmetry)이다.

(c)에 의해 $x > 0$에서 k의 그래프는 g의 그래프와 같으며, $\frac{1}{4}\pi$(이 값에 도달하지는 않는다)에서 0을 향해 내려간다. $x < 0$에서는 g의 그래프를 $\frac{1}{2}\pi$만큼 아래로 평행이동한 것으로, 0($x \to -\infty$일 때)에서 $x \to 0^-$일 때 $-\frac{1}{4}\pi$를 향해 내려간다. 따라서 k는 홀함수이고, 정의되지 않는 $x = 0$에서 $\frac{1}{2}\pi$만큼 불연속적으로 뛴다.



($x > 0$에서는 두 곡선이 일치한다. 그 구간에서 점선 곡선을 실선보다 약간 위에 그린 것은 두 곡선을 모두 볼 수 있게 하기 위해서일 뿐이다.)

소문항 (ii)(e)

$x > 0$에 대하여 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^{-1}\dfrac{1}{x} = \dfrac{-1/x^2}{1+1/x^2} = -\dfrac{1}{1+x^2}$이다. $\tan^{-1}(1/x)$를 미분하고 1을 적분하는 방식으로 부분적분(integration by parts)을 하면

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{k}(x)\,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{2}\left[x\tan^{-1}\frac{1}{x}\right]_0^1 + \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{4}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2.\end{aligned}$$

아래끝에서는 $\tan^{-1}(1/x)$가 $\frac{1}{2}\pi$보다 작게 유지되므로 $x \to 0^+$일 때 $x\tan^{-1}(1/x) \to 0$이다. (피적분함수(integrand)가 유계이므로 이 적분은 이상적분(improper integral)이 아닌 온전한 정적분이다.)

따라서. (c)에 의해 $-1 \le x < 0$에서 $\mathrm{g}(x) = \mathrm{k}(x) + \frac{1}{2}\pi$이다. (b)에 의해 k는 홀함수이므로 $\int_{-1}^0 \mathrm{k}(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \mathrm{k}(x)\,\mathrm{d}x$이다. 그러므로

$$\int_{-1}^0 \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi - \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2\right) = \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2.$$

검산

- $[-1, 0]$에서 g는 $\mathrm{g}(-1) = \tan^{-1}(\sqrt{2}+1) = \frac{3}{8}\pi \approx 1.178$에서 $\frac{1}{4}\pi \approx 0.785$로 감소하므로, 적분값은 이 두 값 사이에 있어야 한다. 우리의 답은 $\frac{3}{8}\pi - \frac{1}{4}\ln 2 \approx 1.0048$이고, 수치적분(numerical quadrature)으로도 소수점 아래 열 자리까지 같은 값을 얻는다. 마찬가지로 $\int_0^1 \mathrm{k}\,\mathrm{d}x \approx 0.56599$이다.

- 미분하면 $\mathrm{g}'(x) = -\dfrac{1}{2(1+x^2)}$이므로, 실제로 $\mathrm{g}(x) = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\tan^{-1} x$이다. 이 식을 보면 (a)는 자명하고, 이를 직접 적분하면 (e)의 답이 다시 나온다.
- $x = 1$에서: $\mathrm{f}(1) = \sqrt{2} - 1 = \tan\frac{1}{8}\pi$이고 $\mathrm{k}(1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{8}\pi$로, (c)가 예측한 대로이다.

흔한 실수

- 모든 큰 $|x|$에 대하여 $\sqrt{x^2+1} \approx x + \frac{1}{2x}$라고 쓰는 것. 음수 x에 대해서는 부호가 틀리며, 점근선 $y = -2x$를 가려 버린다.
- (c)로부터 모든 곳에서 $\mathrm{k} = \mathrm{g}$라고 결론짓는 것. 탄젠트 값이 같으면 각은 π의 배수 차이를 제외하고만 같으며, $x < 0$에서 두 함수는 $\frac{1}{2}\pi$만큼 차이 난다.
- 부분적분에서 0에서의 $x\tan^{-1}(1/x)$의 극한을 정당화하는 것을 잊는 것.

STEP 너머

$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$이므로 함수 f는 $\mathrm{e}^{-\sinh^{-1} x}$이다. 역수 성질 $\mathrm{f}(-x) = 1/\mathrm{f}(x)$는 바로 $\sinh^{-1}$이 홀함수라는 사실이다. 탄젠트 값이 같아도 각이 같을 필요는 없다는 (c)의 함정은 역함수(inverse function)의 분지(branch) 문제를 실변수에서 본 모습이다. 이 문제는 복소로그(complex logarithm)와 편각(argument)에서 더 심각하게 다시 나타난다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이를 살펴보기에 아름다운 책이고, Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 극한과 이상적분을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.