풀이

STEP III 2025, 문제 6

순수수학 • 근의 대칭함수

> **STEP III 2025, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

핵심 아이디어

$a+b+c$, $a^2+b^2+c^2$, $a^3+b^3+c^3$에 대한 조건은 사실상 기본 대칭함수(elementary symmetric functions) $a+b+c$, $ab+bc+ca$, abc에 대한 조건이다. 이렇게 바꾸어 놓으면 (i)에서는 세 수가 아주 간단한 다항식의 근이 되고, (ii)와 (iii)에서는 잘 알려진 인수분해(factorisation)가 모든 일을 해 준다. 마지막 문항은 같은 대수 계산을 거꾸로 하는 것이다.

풀이

소문항 (i)

$a+b+c=0$의 양변을 제곱하면

$$0=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=2(ab+bc+ca),$$

이므로 $ab+bc+ca=0$도 성립한다.

모두 실수일 수는 없다. a, b, c가 모두 실수라면 a^2, b^2, c^2은 합이 0인 음이 아닌 실수이므로 $a=b=c=0$이어야 한다. 이는 세 수가 0이 아니라는 조건에 모순이므로, 세 수가 모두 실수일 수는 없다.

절댓값이 같다. $p=abc$라 하면 p는 0이 아니다. $a+b+c=0$이고 $ab+bc+ca=0$이므로

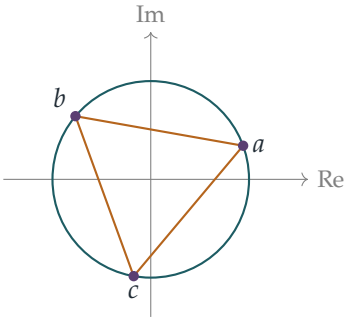
$$(z-a)(z-b)(z-c)=z^3-(a+b+c)z^2+(ab+bc+ca)z-abc=z^3-p.$$

따라서 a, b, c는 각각 $z^3=p$의 근이다. 즉

$$a^3=b^3=c^3=p.$$

절댓값(modulus)을 취하면 $|a|^3 = |b|^3 = |c|^3 = |p|$이고, 절댓값은 음이 아닌 실수이므로 $|a| = |b| = |c| = |p|^{1/3}$이다. 따라서 a, b, c의 절댓값은 모두 같다.

사실 a, b, c는 p의 세 세제곱근(cube roots)이며, 원점을 중심으로 하는 정삼각형의 꼭짓점에 놓인다.



소문항 (ii)

$a + b + c = 0$이라 하자. 그러면 $c = -(a + b)$이고

$$a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 - (a + b)^3 = -3a^2b - 3ab^2 = -3ab(a + b) = 3abc.$$

여기에 $a^3 + b^3 + c^3 = 0$까지 성립하면 $abc = 0$이므로, 세 수 중 적어도 하나는 0이다. 따라서 두 성질을 모두 만족하는 0이 아닌 세 복소수는 존재하지 않는다.

소문항 (iii)

이번에 쓸모 있는 항등식(identity)은

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a),$$

이며, 전개하여 확인할 수 있다. 양변 모두 a^2b, ab^2 등을 각각 세 번씩, abc를 여섯 번 포함한다.

이제 $d = -(a + b + c)$이므로 $d^3 = -(a + b + c)^3$이고

$$0 = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = a^3 + b^3 + c^3 - (a + b + c)^3 = -3(a + b)(b + c)(c + a).$$

생각해 보기 곱이 0이라는 사실이 왜 절댓값에 대해 무언가를 알려 주는가?

복소수들의 곱이 0이 되는 것은 어느 한 인수가 0일 때뿐이다. 따라서 $a + b$, $b + c$, $c + a$ 중 하나는 0이다. $a + b = 0$이라 하자(나머지 경우는 문자의 이름만 바꾸면 같다). 그러면 $b = -a$이므로 $|b| = |a|$이다. 따라서 네 수 중 적어도 두 수는 절댓값이 같다.

(여기서는 $d \neq 0$이라는 조건도, 네 수가 0이 아니라는 조건도 쓰지 않았다. 결론은 단순히 네 수가 $a, -a, c, -c$처럼 서로 부호만 다른 두 쌍으로 나뉜다는 것이다.)

소문항 (iv)

$c = 1, d = -2, e = 3$으로 두면

$$c + d + e = 2, \qquad c^3 + d^3 + e^3 = 1 - 8 + 27 = 20,$$

이므로 다음을 만족하는 실수 a, b가 필요하다.

$$a + b = -2, \qquad a^3 + b^3 = -20.$$

$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$를 이용하면 두 번째 조건은

$$-20 = -8 + 6ab \quad \Longrightarrow \quad ab = -2.$$

가 된다. 따라서 a와 b는 $t^2 + 2t - 2 = 0$의 근, 곧

$$a = -1 + \sqrt{3}, \qquad b = -1 - \sqrt{3},$$

이며, 판별식(discriminant) $4 + 8 = 12$가 양수이므로 실수이다. 두 수의 크기는 $\sqrt{3} - 1 \approx 0.73$과 $\sqrt{3} + 1 \approx 2.73$이고, 어느 것도 1, 2, 3이 아니다(둘 다 무리수이다). 따라서

$$-1 + \sqrt{3}, \quad -1 - \sqrt{3}, \quad 1, \quad -2, \quad 3$$

은 크기가 서로 다르고, 합이 0이며, 세제곱의 합도 0인 다섯 실수이다.

검산

- (i)에서 1의 세제곱근 $1, \omega, \omega^2$은 $1 + \omega + \omega^2 = 0$과 $1 + \omega^2 + \omega^4 = 1 + \omega^2 + \omega = 0$을 만족한다. 예측대로 모두 절댓값이 1이고, 모두 실수인 것은 아니다.
- (iii)에서 $a = 2, b = -2, c = \mathrm{i}, d = -\mathrm{i}$를 대입해 보면 두 합이 모두 0이고, 실제로 네 수는 부호만 다른 쌍으로 짝지어진다.
- (iv)에서 $(\sqrt{3} - 1)^3 = 6\sqrt{3} - 10$과 $(-1 - \sqrt{3})^3 = -6\sqrt{3} - 10$을 이용하여 수치로 계산하면 $0.7320 - 2.7320 + 1 - 2 + 3 = 0$이고 $0.3923 - 20.3923 + 1 - 8 + 27 = 0$이다.

흔한 실수

- (i)에서 $a^3 = b^3$으로부터 "세제곱근을 취하여" $|a| = |b|$라고 결론짓는 것. a와 b가 같을 필요는 없지만, 절댓값은 음이 아닌 실수이므로 절댓값은 같다.
- (iii)에서 $(a+b)(b+c)(c+a) = 0$이면 **왜** 한 인수가 0이어야 하는지 밝히지 않는 것($\mathbb{C}$에는 영인자(zero divisor)가 없다).
- (iv)에서 a와 b의 크기가 1, 2, 3과 다르고 서로도 다르다는 것을 확인하지 않는 것.

STEP 너머

여러 변수의 대칭다항식(symmetric polynomial)은 모두 기본 대칭다항식으로 나타낼 수 있으며, 뉴턴 항등식(Newton's identities)은 거듭제곱 합 $a^k + b^k + c^k + \ldots$과의 관계를 명시적으로 알려 준다. 이 문제의 조건들이 수들을 그토록 강하게 결정하는 것은 이 때문이다. 이와 가까운 문제로 프루에–태리–에스콧 문제(Prouhet–Tarry–Escott problem)가 있다. 서로 다른 두 정수 집합 가운데 일제곱, 이제곱, ..., k제곱의 합이 모두 같은 것을 찾는 문제로, 아직 부분적으로 풀리지 않은 채 남아 있다. 다항식과 그 근의 대수학에 대해서는 Allenby, *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.