풀이

STEP III 2025, 문제 5

순수수학 • 3차원 벡터

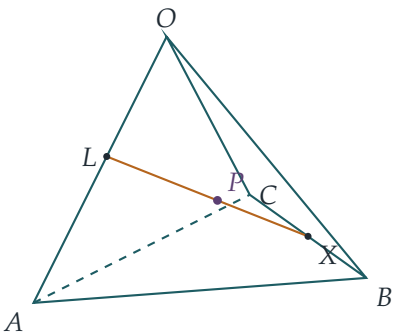
> **STEP III 2025, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

핵심 아이디어

O가 한 직선 위에 있지 않은 세 점 A, B, C가 이루는 평면 위쪽에 있으므로 벡터 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$는 일차독립(linearly independent)이다. 따라서 이 벡터들로 쓴 벡터 방정식에서는 언제나 **계수를 비교**(*compare coefficients*)할 수 있다. 문제에 나오는 모든 점은 미지의 매개변수로 나타낸 뒤 계수를 맞추어 구한다. 평면으로부터의 높이는 계수에 일정한 수를 곱한 것일 뿐이므로 "수평"이라는 조건을 다루기 쉽다.

풀이

O는 평면 ABC 위에 있지 않으므로 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 중 어느 것도 나머지 두 벡터의 일차결합으로 나타낼 수 없다(예를 들어 $\mathbf{c} = p\mathbf{a} + q\mathbf{b}$이면 O, A, B, C가 한 평면 위에 있게 된다). 따라서 $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = x'\mathbf{a} + y'\mathbf{b} + z'\mathbf{c}$이면 반드시 $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$이다. 또한 $k > 0$임에 주목한다.



소문항 (i)

$\overrightarrow{OL} = \lambda\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OX} = (1-t)\mathbf{b} + t\mathbf{c}$로 놓는다. P가 LX 위에 있으므로 어떤 s에 대하여

$$\overrightarrow{OP} = (1-s)\lambda\,\mathbf{a} + s(1-t)\,\mathbf{b} + st\,\mathbf{c}.$$

이를 $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$와 비교하면

$$(1-s)\lambda = \alpha, \qquad s(1-t) = \beta, \qquad st = \gamma.$$

뒤의 두 식을 더하면 $s = \beta + \gamma$이고, 따라서 $t = \gamma/(\beta+\gamma)$이므로

$$\overrightarrow{OX} = \frac{\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}}{\beta+\gamma}.$$

마지막으로 $1 - s = 1 - \beta - \gamma = k + \alpha$이고 이는 양수이므로

$$\overrightarrow{OL} = \frac{\alpha}{1-s}\,\mathbf{a} = \frac{\alpha}{k+\alpha}\,\mathbf{a},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. (계수가 하나로 정해지므로 L과 X는 유일하다. 또 $0 < s < 1$이고 $0 < t < 1$이므로 P는 L과 X 사이에 엄격하게 놓이고, X는 B와 C 사이에 엄격하게 놓인다.)

소문항 (ii)

문자를 순환시켜($\mathbf{a} \to \mathbf{b} \to \mathbf{c} \to \mathbf{a}$, $\alpha \to \beta \to \gamma \to \alpha$) 같은 논증을 적용하면

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\beta}{k+\beta}\mathbf{b}, \quad \overrightarrow{ON} = \frac{\gamma}{k+\gamma}\mathbf{c}, \quad \overrightarrow{OY} = \frac{\gamma\mathbf{c} + \alpha\mathbf{a}}{\gamma+\alpha}, \quad \overrightarrow{OZ} = \frac{\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}}{\alpha+\beta}.$$

생각해 보기 주어진 세 점을 지나는 평면이 수평인지 어떻게 알 수 있을까?

세 점의 높이가 모두 같을 때, 그리고 그때에만 평면은 수평이다. O가 평면 ABC로부터 높이 $h > 0$인 곳에 있다고 하자. 그러면 A, B, C는 각각 O보다 수직 거리 h만큼 아래에 있으므로, OA 위의 점 $\mu\mathbf{a}$는 O보다 μh만큼 아래에 있고, OB와 OC 위의 점도 마찬가지이다. 따라서 L, M, N(서로 다른 세 모서리 위에서 O가 아닌 곳에 있으므로 한 직선 위에 있지 않다)은 O보다 각각

$$\frac{\alpha h}{k+\alpha}, \qquad \frac{\beta h}{k+\beta}, \qquad \frac{\gamma h}{k+\gamma}$$

만큼 아래에 있다. 이제

$$\frac{\alpha}{k+\alpha} = \frac{\beta}{k+\beta} \iff \alpha k + \alpha\beta = \beta k + \alpha\beta \iff k(\alpha-\beta) = 0 \iff \alpha = \beta,$$

이며, 여기서 $k > 0$을 이용하였다. 다른 쌍에 대해서도 마찬가지이므로

$$\text{평면}LMN\text{이 수평이다} \iff \alpha = \beta = \gamma.$$

다음으로, OP는 평면 ABC와 어디에서 만나는가? 점 $x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}$가 그 평면 위에 있을 필요충분조건은 $x+y+z=1$이다(이때 그 점은 $\mathbf{a}+y(\mathbf{b}-\mathbf{a})+z(\mathbf{c}-\mathbf{a})$이고, 평면 위의 모든 점은 이 꼴이다). 점 $\mu\overrightarrow{OP}$의 계수의 합은 $\mu(\alpha+\beta+\gamma)$이므로 직선 OP는 평면과

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

에서 만난다. 계수를 비교하면 이것이 $\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$와 같을 필요충분조건은

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{1}{3},$$

즉 $\alpha=\beta=\gamma$이다. 두 조건이 모두 $\alpha=\beta=\gamma$와 동치이므로, 평면 LMN이 수평일 필요충분조건은 OP가 평면 ABC와 삼각형 ABC의 무게중심(centroid) G에서 만나는 것이다. 이로써 "증명하라" 부분이 끝난다.

이 경우 $\overrightarrow{OX}=\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$이고, Y와 Z에 대해서도 마찬가지이다. 즉 점 X, Y, Z는 각각 BC, CA, AB의 **중점(midpoint)**이다.

소문항 (iii)

다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\overrightarrow{OP}=k\,\mathbf{0}+\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c},\qquad k+\alpha+\beta+\gamma=1,$$

여기서 네 가중치 k,α,β,γ는 모두 양수인데, 이는 바로 $\alpha+\beta+\gamma<1$이기 때문이다. 따라서 P는 O, A, B, C의 가중치가 모두 양수인 가중평균이고, 이는 P가 사면체(tetrahedron) $OABC$의 **내부**에 엄격하게 놓인다는 뜻이다.

달리 말하면, α, β, γ가 양수라는 것만으로 P는 모서리 OA, OB, OC가 생성하는, 꼭짓점이 O인 무한한 삼면 뿔 안에 놓인다. P가 O보다 아래에 있는 깊이는 $(\alpha+\beta+\gamma)h$이므로, 조건 $\alpha+\beta+\gamma<1$은 P가 평면 ABC 위쪽, 즉 O와 같은 쪽에 있다는 뜻이다. (합이 1이면 P는 면 ABC 위에 있고, 1보다 크면 그 너머에 있다.)

검산

- $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{4}$로 놓으면 $k=\frac{1}{4}$이다. 그러면 $\overrightarrow{OL}=\frac{1}{2}\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\mathbf{b}$, $\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\mathbf{c}$이고, 소문항 (ii)가 예측하는 대로 LMN은 분명히 수평인 중간 단면이다.
- $k\to 0$일 때(P가 면 ABC에 가까워질 때) $\overrightarrow{OL}\to\mathbf{a}$이다. 즉 L이 A로 내려오는데, 이때 L, P, X가 모두 평면 ABC 위에 놓이므로 타당하다.
- 무작위로 만든 사면체 2000개와 무작위 α,β,γ로 컴퓨터 검사를 한 결과, P가 LX 위에 있음(잔차 약 10^{-15})과, G가 무게중심일 때 그리고 그때에만 LMN이 수평임을 확인하였다.

흔한 실수

- 왜 계수 비교가 허용되는지 말하지 않고 계수를 비교하는 것. 계수 비교에는 **a**, **b**, **c**가 일차독립이어야 하고, 바로 여기에서 "O가 평면 위쪽에 있다"는 조건이 쓰인다.
- $k(\alpha - \beta) = 0$에서 약분하려면 $k > 0$이 필요하다는 것을 잊는 것.
- "필요충분조건"의 한 방향만 증명하는 것.

STEP 너머

수 $(k, \alpha, \beta, \gamma)$는 사면체 $OABC$에 대한 P의 **무게중심 좌표**(*barycentric coordinates*)이다. 점이 내부에 있을 필요충분조건은 이 좌표가 모두 양수인 것이고, 그중 하나가 0이면 점은 면 위에 있다. 무게중심 좌표는 아핀 기하학(affine geometry)의 자연스러운 좌표이며, 선형대수학(linear algebra)(아핀 결합(affine combination)과 볼록 껍질(convex hull))과 컴퓨터 그래픽스에서 다시 등장한다. 컴퓨터 그래픽스에서는 무게중심 가중치로 보간하여 삼각형에 음영을 입힌다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 일차독립과 좌표가 이런 식으로 쓰이는 모습을 보기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.