풀이

STEP III 2025, 문제 4

순수수학 • 곡선의 변환

> **STEP III 2025, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

핵심 아이디어

평면의 사상(map) T가 역사상(inverse)을 가진다고 하자. 그러면 곡선 $f(T^{-1}(x,y)) = 0$은 곡선 $f(x,y) = 0$의 T에 의한 상(image)이다. 어떤 점이 새 곡선 위에 있는 것은 정확히 T^{-1}이 그 점을 옛 곡선 위로 보낼 때이기 때문이다. 소문항 (i)에서는 이를 회전(rotation)에 대하여 보이고, 소문항 (ii)에서는 $T^{-1} = T$인 반사(reflection)에 대하여 같은 일을 한다. 소문항 (iii)에서는 치환(substitution) $u = x - 2y$를 하면 주어진 방정식이 $y = \sin x$를 수평 방향으로 층밀림(shear) 변환한 것이 된다는 점을 알아챈다. 그다음 매개변수화(parametrisation)를 이용하면 음함수 미분(implicit differentiation)의 번거로움 없이 접선(tangent)을 구할 수 있다.

풀이

소문항 (i)

행렬의 곱을 전개하면

$$x_2 = \frac{x_1 - y_1}{\sqrt{2}}, \qquad y_2 = \frac{x_1 + y_1}{\sqrt{2}}.$$

G_2의 방정식에 있는 두 괄호에 $(x,y) = (x_2, y_2)$를 대입하면

$$\frac{x_2}{\sqrt{2}} + \frac{y_2}{\sqrt{2}} = \frac{(x_1 - y_1) + (x_1 + y_1)}{2} = x_1,$$
$$-\frac{x_2}{\sqrt{2}} + \frac{y_2}{\sqrt{2}} = \frac{-(x_1 - y_1) + (x_1 + y_1)}{2} = y_1.$$

따라서 (x_2, y_2)에서 G_2의 방정식의 좌변은 $\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{4}$이다. (x_1, y_1)이 G_1 위에 있으므로 이 값은 1이다. 그러므로 (x_2, y_2)는 G_2 위에 있다.

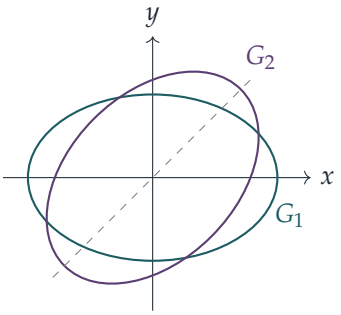
회전에 대해서는 $\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ = \sin 45^\circ$임에 주목하면, 행렬은

$$R = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix},$$

즉 원점을 중심으로 시계 반대 방향으로 45° 회전하는 변환이다. 방금 R이 G_1의 모든 점을 G_2 위로 보낸다는 것을 보였다. G_2가 회전된 곡선과 **정확히** 같음을 보이려면 G_2의 모든 점이 G_1에서 온다는 것도 보여야 한다. G_2 위의 임의의 점 (x, y)를 잡고

$$x_1 = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}, \qquad y_1 = -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}},$$

로 두자. 이것은 $R^{-1}(x, y)$(반대로 45° 되돌리는 회전)이다. G_2의 방정식은 바로 $\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{4} = 1$을 뜻하므로 $(x_1, y_1) \in G_1$이고, $R(x_1, y_1) = (x, y)$이다. 그러므로 $G_2 = R(G_1)$이다. 즉 타원(ellipse) G_2는 G_1을 원점을 중심으로 시계 반대 방향으로 45° 회전한 것이다.



소문항 (ii)(a)

행렬을 M이라 하자. 점 (x, y)가 불변점(invariant point)인 것은 $M\binom{x}{y} = \binom{x}{y}$일 때, 즉

$$-0.6x + 0.8y = x, \qquad 0.8x + 0.6y = y.$$

일 때이다. 첫째 식에서 $0.8y = 1.6x$, 즉 $y = 2x$를 얻고, 둘째 식에서 $0.8x = 0.4y$를 얻는데 이는 같은 식이다. 따라서 불변점들이 이루는 직선(거울 직선)은

$$y = 2x.$$

이다.

소문항 (ii)(b)

$(X, Y) = M(x, y) = (-0.6x + 0.8y,\ 0.8x + 0.6y)$로 쓰자. 둘째 방정식은 정확히

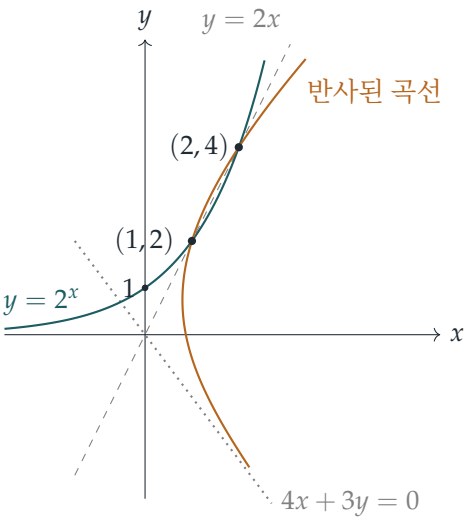
$$Y = 2^X.$$

을 말한다. 따라서 (x, y)가 둘째 그래프 위에 있을 필요충분조건은 $M(x, y)$가 $y = 2^x$ 위에 있는 것이다. 반사는 자기 자신을 되돌리므로($M^2 = I$이며, 직접 곱해 보면 확인할 수 있다) $(x, y) = M(X, Y)$이다. 이는 소문항 (i)의 논증과 같다. 즉 둘째 그래프는 $y = 2^x$를 직선 $y = 2x$에 대하여 반사한 것이다.

> **생각해 보기** 반사된 곡선의 점근선은 어디로 가며, 곡선은 어느 방향으로 무한히 뻗어 나가는가?

$y = 2^x$의 특징을 하나씩 반사해 보자.

- **점근선**(*asymptote*). $x \to -\infty$일 때 $y = 2^x$는 x축에 가까워진다. 방향 $(1, 0)$은 $M(1, 0) = (-0.6, 0.8)$로 반사되므로 x축은 직선 $4x + 3y = 0$, 즉 $y = -\frac{4}{3}x$로 반사된다. 같은 말로, $Y = 0.8x + 0.6y = 2^X > 0$이므로 반사된 곡선은 엄밀히 $4x + 3y > 0$인 쪽에 있고, $X \to -\infty$일 때 $4x + 3y = 0$에 가까워진다. 멀리 떨어진 곳에서 $y = 2^x$의 점들은 X가 절댓값이 큰 음수일 때 대략 $(X, 0)$이고, 이 점들은 대략 $(-0.6X, 0.8X)$로 반사된다. 따라서 반사된 곡선은 제4사분면에서 $x \to +\infty$, $y \to -\infty$로 가며 점근선에 가까워진다.
- **거울 위의 점**. 반사는 $y = 2x$ 위의 모든 점을 고정한다. 그런데 $2^x = 2x$는 $x = 1$과 $x = 2$에서 성립한다($2^x - 2x$가 볼록(convex)하므로 이 두 점에서만 성립한다). 따라서 두 곡선은 모두 $(1, 2)$와 $(2, 4)$를 지나며, 그 점들에서 교차한다. 컴퓨터로 $y = 2^x$를 따라 탐색해 보면 다른 공통점은 발견되지 않는다.
- **그 밖의 점**. $(0, 1)$은 $(0.8, 0.6)$으로 반사된다.
- **가장 왼쪽 점**. 반사된 곡선은 $\left(-0.6t + 0.8 \cdot 2^t,\ 0.8t + 0.6 \cdot 2^t\right)$이다. 이 곡선의 x좌표는 $0.8 \cdot 2^t \ln 2 = 0.6$일 때 최소이며, 그 점은 대략 $(0.80, 0.74)$이다. 그곳에서 접선은 수직이므로, 반사된 곡선은 x의 함수의 그래프가 아니다.
- **증가**. $X \to +\infty$일 때 점 $(X, 2^X)$는 대략 $2^X(0.8, 0.6)$으로 반사된다. 따라서 곡선은 대략 기울기 $\frac{3}{4}$인 방향으로 오른쪽 위로 뻗어 나간다.



소문항 (iii)

$0 \le x \le 2\pi$에서 그래프 $y = \sin x$는 익숙한 한 번의 물결 모양이다.

$y = \sin(x - 2y)$에 대해서는 $u = x - 2y$로 두자. 점 (x, y)가 곡선 위에 있을 필요충분조건은 $y = \sin u$이고, 이때 $x = u + 2y$이다. 따라서 곡선은 정확히

$$x = u + 2\sin u, \qquad y = \sin u.$$

이다. 이것은 $y = \sin x$의 모든 점을 그 높이의 두 배만큼 옆으로 민 것, 즉 수평 층밀림 $(u, v) \mapsto (u + 2v, v)$이다.

어떤 u가 $0 \le x \le 2\pi$를 주는가? $x(u) = u + 2\sin u$라 하자. 그러면 $x(-u) = -x(u)$이고 $x(u + 2\pi) = x(u) + 2\pi$이다. $x'(u) = 1 + 2\cos u$이므로 함수 $x(u)$는 $[0, \frac{2\pi}{3}]$에서 0부터 $\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 3.83$까지 증가하고, 그다음 $[\frac{2\pi}{3}, \pi]$에서 π까지 감소한다. 따라서 $0 < u \le \pi$에서 그 값은 $(0, 2\pi)$ 안에 있고, $[\pi, 2\pi]$에서는 대칭성 $x(2\pi - u) = 2\pi - x(u)$에 의하여 $(0, 2\pi]$ 안에 있다. $u > 2\pi$이면 수학적 귀납법(induction)에 의하여 $x(u) = x(u - 2\pi) + 2\pi > 2\pi$이고, $u < 0$이면 기함수(odd function) 성질에 의하여 $x(u) < 0$이다. 따라서 구하는 곡선 부분은 u가 0부터 2π까지 움직일 때 $(0, 0)$부터 $(2\pi, 0)$까지 정확히 한 번 그려진다.

접선. 곡선을 따라

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = 1 + 2\cos u, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = \cos u, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos u}{1 + 2\cos u}.$$

$\cos u = 0$이면 $1 + 2\cos u = 1$이므로, 이 두 도함수가 동시에 0이 되는 일은 없다.

▶ 수평 접선은 $\cos u = 0$, 즉 $u = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$인 곳에서 생긴다.

$$\left(\tfrac{\pi}{2} + 2,\ 1\right) \quad \text{그리고} \quad \left(\tfrac{3\pi}{2} - 2,\ -1\right).$$

▶ 수직 접선은 $\cos u = -\frac{1}{2}$, 즉 $u = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$인 곳에서 생긴다.

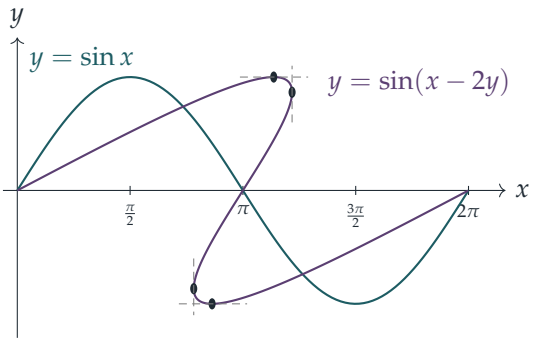
$$\left(\tfrac{2\pi}{3} + \sqrt{3},\ \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{그리고} \quad \left(\tfrac{4\pi}{3} - \sqrt{3},\ -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

수치로는 대략 $(3.57, 1)$, $(2.71, -1)$, $(3.83, 0.87)$, $(2.46, -0.87)$이다.

> **생각해 보기** 꼭대기의 수평 접선은 $x \approx 3.57$에 있는데, 곡선은 그 뒤에도 $x \approx 3.83$까지 간다. 곡선은 실제로 어떤 모양인가?

u를 0부터 2π까지 따라가 보자. 곡선은 기울기 $\frac{1}{3}$($u = 0$을 대입)으로 원점을 떠나는데, 이는 $y = \sin x$보다 완만하다. 곡선은 $(\frac{\pi}{2} + 2, 1)$의 최댓점까지 올라간 다음, 오른쪽 아래로 움직여 $(\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$의 수직 접선에 이른다. 그다음 왼쪽으로 꺾여 돌아오면서 기울기 $\frac{-1}{-1} = 1$로 $(\pi, 0)$을 지난다. $(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$에서 두 번째 수직 접선에 이르고, 오른쪽으로 돌아 최솟점 $(\frac{3\pi}{2} - 2, -1)$을 지나 $(2\pi, 0)$까지 올라간다. 곡선은 부서지는 파도처럼 앞으로 넘어가 있다. $x \approx 2.46$과 $x \approx 3.83$ 사이에서는 각 x에 대하여 y의 값이 세 개 있다. 전체 그림은 $(\pi, 0)$에 대하여 반 바퀴 회전 대칭(half-turn symmetry)이다.

참고로, 두 그래프는 $\sin x = \sin(x - 2\sin x)$인 곳에서 만난다. $\sin x = 0$이어서 $x = 0, \pi, 2\pi$이거나, $x - \sin x = \frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3\pi}{2}$이어서 $x \approx 2.31$과 $x \approx 3.97$이다.



검산

▶ 소문항 (i): G_1의 꼭짓점 $(3, 0)$을 잡자. 이 점은 $(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}})$로 옮겨지고, G_2의 방정식의 두 괄호는 각각 3과 0이 되므로 좌변은 1이다.

▶ 소문항 (ii): $M\binom{1}{2} = \binom{-0.6+1.6}{0.8+1.2} = \binom{1}{2}$이며, 불변점이라면 마땅히 그래야 한다. 점 $(1, 2)$는 둘째 방정식도 만족한다: $0.8 + 1.2 = 2 = 2^{-0.6+1.6}$.

▶ 소문항 (iii): $(\frac{\pi}{2} + 2, 1)$에서 $x - 2y = \frac{\pi}{2}$이고, $\sin\frac{\pi}{2} = 1 = y$이다. 마찬가지로 $(\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$에서는 $x - 2y = \frac{2\pi}{3}$이고, $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$이다. 음함수 미분을 하면 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos(x-2y)}{1+2\cos(x-2y)}$를 얻는다. 이 식의 분자는 첫째 점에서 0이고, 분모는 둘째 점에서 0이다.

흔한 실수

- G_1이 G_2 안으로 옮겨진다는 것만 보이는 것. G_2가 회전된 곡선이다라고 말하려면 G_2의 모든 점이 G_1에서 온다는 것, 즉 역사상에 대한 논증도 필요하다.
- $y = \sin(x - 2y)$를 x의 함수로 취급하여, 곡선을 앞으로 넘어간 부분 없이 한 번의 물결로 그리는 것. 수직 접선이 있는 곳이 바로 곡선이 접혀 되돌아오는 곳이다.
- 반사된 지수함수가 비스듬한 점근선 $4x + 3y = 0$을 가지며 전체가 그 한쪽에만 놓인다는 것을 잊는 것.

STEP 너머

이 문제의 바탕에 있는 원리는, 역사상을 가지는 사상 T를 곡선 $f(x, y) = 0$에 적용하면 곡선 $f\left(T^{-1}(x, y)\right) = 0$이 된다는 것이다. 대학 1학년 선형대수(linear algebra) 과목에서 이는 기저 변환(change of basis)에 따라 이차형식(quadratic form)이 어떻게 바뀌는지에 대한 연구가 된다. 원뿔곡선(conic)에서 xy항을 없애기 위해 축을 회전하는 것은 대칭행렬(symmetric matrix)을 대각화(diagonalising)하는 일의 2차원 경우이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)는 회전, 반사와 그 고유벡터(eigenvector)를 매우 읽기 쉽게 다룬다((ii)(a)의 불변 직선은 고윳값(eigenvalue) 1에 대응하는 고유벡터이다).

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.