풀이

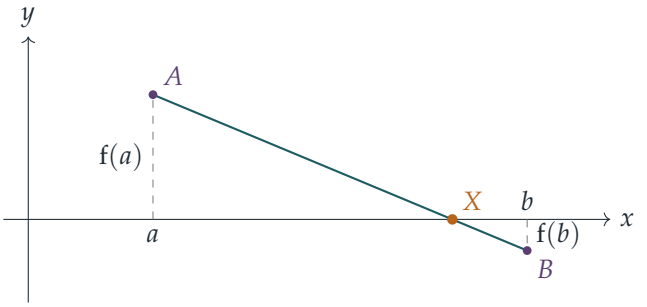
# STEP III 2025, 문제 3

순수수학 • 평균 부등식

> **STEP III 2025, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

## 핵심 아이디어

$A$는 축 위에, $B$는 축 아래에 있으므로, 교점 $X$는 $AB$를 두 높이의 비 $\mathrm{f}(a) : \mathrm{f}(b)$로 나눈다. 따라서 $m$은 $a$와 $b$의 **가중평균**(*weighted average*)이다. 이후의 모든 내용은 f가 바뀔 때 가중치가 어떻게 변하는지에 관한 것이다. $m$을 하나의 비 $\mathrm{f}(a)/\mathrm{f}(b)$의 함수로 쓰고 나면, f의 두 가지 선택을 비교하는 일은 두 수를 비교하는 일이 된다.




## 풀이

### 소문항 (i)

$A$, 그 수선의 발 $(a, 0)$, $X$로 이루어진 삼각형과 $B$, 그 수선의 발 $(b, 0)$, $X$로 이루어진 삼각형은 닮음(similar)이다($X$에서 맞꼭지각이고, 수선의 발에서 직각이다). 따라서

$$\frac{m-a}{b-m} = \frac{\mathrm{f}(a)}{\mathrm{f}(b)} \quad \Longrightarrow \quad m\,\mathrm{f}(b) - a\,\mathrm{f}(b) = b\,\mathrm{f}(a) - m\,\mathrm{f}(a),$$

이므로

$$\boxed{m = \frac{a\,\mathrm{f}(b) + b\,\mathrm{f}(a)}{\mathrm{f}(a) + \mathrm{f}(b)}}.$$

이다. (분모는 $\mathrm{f} > 0$이므로 양수이다. 직선의 방정식 $y - \mathrm{f}(a) = -\frac{\mathrm{f}(a)+\mathrm{f}(b)}{b-a}(x-a)$에 $y = 0$을 대입해도 같은 답을 얻는다.)

$r = \mathrm{f}(a)/\mathrm{f}(b) > 0$으로 두고 분자와 분모를 $\mathrm{f}(b)$로 나누어 이 식을 다시 써 두면 유용하다.

$$m = \frac{a + br}{1 + r} = b - \frac{b - a}{1 + r}. \qquad (*)$$

**소문항 (ii)**

$\mathrm{f}(x) = \sqrt{x}$일 때

$$m = \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}\sqrt{b}\,(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{ab},$$

이므로 요구한 결과를 얻는다.

두 번째 목표에서는 분수를 정리한 뒤 $a\,\mathrm{f}(b) + b\,\mathrm{f}(a)$에서 분자 $a^{n+1} + b^{n+1}$이 나와야 하므로, $\mathrm{f}(b)$가 $b^{-n}$처럼 행동해야 한다고 짐작할 수 있다. $x > 0$에서 양수인 $\mathrm{f}(x) = x^{-n}$을 시도하면

$$m = \frac{ab^{-n} + ba^{-n}}{a^{-n} + b^{-n}} = \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{b^n + a^n},$$

이다. 여기서 분자와 분모에 $a^n b^n$을 곱했다. 따라서 $\mathrm{f}(x) = x^{-n}$이 조건을 만족한다($m$은 비 $\mathrm{f}(a)/\mathrm{f}(b)$에만 의존하므로, 이것의 양의 상수배도 마찬가지이다). $n = -\frac{1}{2}$이면 첫 번째 결과가 다시 나온다는 점에 주목하자.

**소문항 (iii)**

$r_1 = \mathrm{g}_1(a)/\mathrm{g}_1(b), r_2 = \mathrm{g}_2(a)/\mathrm{g}_2(b)$로 두자. 둘 다 양수이다. $(*)$에 의해 $M_i = b - \dfrac{b-a}{1+r_i}$이다. $b - a > 0$이므로 식 $b - \frac{b-a}{1+r}$는 $r > 0$에서 $r$에 대해 순증가(strictly increasing)한다. 따라서 $r_1 > r_2$임을 보이면 충분하다.

**생각해 보기** 함수 $\mathrm{g}_1/\mathrm{g}_2$에 대한 조건이 어떻게 $r_1$과 $r_2$에 대한 조건으로 바뀌는가?

$h = \mathrm{g}_1/\mathrm{g}_2$로 두자. 그러면

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\mathrm{g}_1(a)\,\mathrm{g}_2(b)}{\mathrm{g}_1(b)\,\mathrm{g}_2(a)} = \frac{h(a)}{h(b)} > 1,$$

이다. $h$가 감소(decreasing)하고 $a < b$이므로 $h(a) > h(b) > 0$이기 때문이다. $r_2 > 0$이므로 $r_1 > r_2$이고, 따라서 $M_1 > M_2$이다.

**따라서.** $m$의 값이 세 평균이 되는 세 함수가 필요하다.

- $f(x) = 1$ (상수)이면 $m = \dfrac{a+b}{2}$이다.
- $f(x) = \sqrt{x}$이면 소문항 (ii)에 의해 $m = \sqrt{ab}$이다.
- $f(x) = x$이면 $m = \dfrac{ab+ba}{a+b} = \dfrac{2ab}{a+b}$이다.

이제 방금 증명한 결과를 두 번 적용한다. $g_1 = 1$, $g_2 = \sqrt{x}$로 두면 비 $g_1/g_2 = x^{-1/2}$는 $x > 0$에서 감소하므로 $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$이다. $g_1 = \sqrt{x}$, $g_2 = x$로 두면 비는 다시 $x^{-1/2}$로 감소하므로 $\sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$이다. 종합하면

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}.$$

이다.

**소문항 (iv)**

곡선이 $A$와 $B$를 지나므로

$$f(a) = p(c-a)^3, \qquad -f(b) = p(c-b)^3, \ \text{즉 } f(b) = p(b-c)^3.$$

이다. $f(b) > 0$이므로 $p \neq 0$이고 $b \neq c$이다. 따라서 나눌 수 있다.

$$\frac{f(a)}{f(b)} = \left(\frac{c-a}{b-c}\right)^3.$$

모든 실수는 실수인 세제곱근(cube root)을 정확히 하나 가지므로, 세제곱근을 취하는 과정은 되돌릴 수 있고

$$\frac{c-a}{b-c} = \left(\frac{f(a)}{f(b)}\right)^{1/3},$$

이므로 요구한 결과를 얻는다. 우변을 $k$로 쓰면$(k > 0)$ $c - a = k(b-c)$이므로 $c(1+k) = a + kb$이고

$$c = \frac{a+kb}{1+k} = \frac{a\,f(b)^{1/3} + b\,f(a)^{1/3}}{f(a)^{1/3} + f(b)^{1/3}},$$

이다. 여기서 분자와 분모에 $f(b)^{1/3}$을 곱했다.

**?** **생각해 보기** 이 공식을 어디서 본 적이 있는가?

이것은 소문항 (i)의 공식에서 f를 $f^{1/3}$으로 바꾼 것과 정확히 같으며, 이 함수 역시 $x > 0$에서 정의되고 양수이다. 따라서 $c$는 함수 $f^{1/3}$에 대한 $m$의 값이다. $g_1 = f$, $g_2 = f^{1/3}$으로 두고 소문항 (iii)을 적용하자.

$$\frac{g_1(x)}{g_2(x)} = f(x)^{2/3}.$$

f가 감소하고 양수이면 $f^{2/3}$도 그러하다. $t \mapsto t^{2/3}$이 $t > 0$에서 증가하기 때문이다. 그러므로 소문항 (iii)에 의해 $M_1 > M_2$이고, 여기서 $M_1 = m$ (f 자신에 대한 값), $M_2 = c$이다. 따라서 $c < m$이다.

## 검산

- $a = 1, b = 4$로 두자. 세 평균은 $2.5 > 2 > 1.6$이고, $\mathrm{f} = \sqrt{x}$이면 $m = (1 \cdot 2 + 4 \cdot 1)/3 = 2 = \sqrt{4}$이다.
- $\mathrm{f}(x) = 1/x$, $a = 1$, $b = 4$일 때: $m = \frac{1/4+4}{5/4} = 3.4$이고, $k = 4^{1/3} \approx 1.587$이면 $c \approx 2.84 < 3.4$이므로 소문항 (iv)의 예측과 일치한다. $m$과 $c$는 가중평균이므로 당연히 둘 다 $a$와 $b$ 사이에 있다.
- 소문항 (ii)에서 $n = 0$으로 두면 $\mathrm{f} = 1$이고 $m = \frac{a+b}{2}$이며, $n = -1$로 두면 $\mathrm{f} = x$이고 $m = \frac{2ab}{a+b}$이므로 소문항 (iii)과 일치한다.

이 결과들과, 여러 가지 $a, b$, f에 대해 모든 결과를 무작위로 시험한 결과는 컴퓨터로 확인하였다.

## 흔한 실수

- $B$의 높이가 $-\mathrm{f}(b)$임을 잊는 것. 그러면 분모가 $\mathrm{f}(b) - \mathrm{f}(a)$가 되고, $a$와 $b$ 사이에 있지 않을 수도 있는 점이 나온다.
- 소문항 (iii)에서 하나의 비 $r$로 줄이지 않고, 네 함숫값을 한꺼번에 교차곱하여 $M_1$과 $M_2$를 비교하려는 것.
- 소문항 (iv)에서 $\mathrm{g}_1 = \mathrm{f}^{1/3}$, $\mathrm{g}_2 = \mathrm{f}$로 순서를 거꾸로 잡는 것. 이때 비 $\mathrm{f}^{-2/3}$는 **증가**하므로, 그 순서로는 소문항 (iii)을 적용할 수 없다.

## STEP 너머

여기서의 모든 $m$은 가중평균 $\lambda a + (1-\lambda)b$이며, 소문항 (iii)은 $n$에 따라 증가하는 거듭제곱 평균족 $\left(a^{n+1} + b^{n+1}\right)/\left(a^n + b^n\right)$(레머 평균(Lehmer means)) 전체의 순서를 정하는 깔끔한 방법이다. 평균 사이의 부등식과 그 바탕에 있는 볼록성(convexity) 논증은 대학 1학년 해석학의 단골 주제이다. Abbott의 *Understanding Analysis*와 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*는 이런 유형의 논증을 더 많이 접할 수 있는 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.