풀이

STEP III 2025, 문제 2

순수수학 • 반복 함수와 주기성

> **STEP III 2025, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 8.8 절 **주기 3이면 혼돈이다**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch08/period-three.html

핵심 아이디어

이 문제에 나오는 함수는 모두 직선 조각으로 이루어져 있으므로, 문제 전체가 지금 어느 조각 위에 있는지를 놓치지 않는 일이다. 안쪽 함수의 부호를 이용해 절댓값(modulus) 기호를 하나씩 없애면서 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$와 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)))$를 조각별로 구한다. 그다음 수열(sequence)에 관한 질문은 거꾸로 읽는다. $\mathrm{f}^n(x) = x$의 해는 n번 거친 뒤 자기 자신으로 돌아오는 시작값이고, 7보다 작은 모든 수는 f에 대한 원상(preimage)을 정확히 두 개 가지며, 그 둘은 서로 부호만 반대이다.

풀이

이 풀이 전체에서 $\mathrm{f}^2(x) = \mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$, $\mathrm{f}^3(x) = \mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)))$로 쓴다. f는 $|x|$에만 의존하므로 세 함수는 모두 우함수(even function)이다. 따라서 $x \geq 0$에서만 다루고 y축에 대해 대칭이동하면 충분하다.

소문항 (i)

(a) $y = \mathrm{f}(x)$의 그래프는 꼭짓점이 $(0, 7)$이고 기울기가 ∓ 2인 뒤집힌 V자 모양이며, $x = \pm\frac{7}{2}$에서 x축과 만난다.

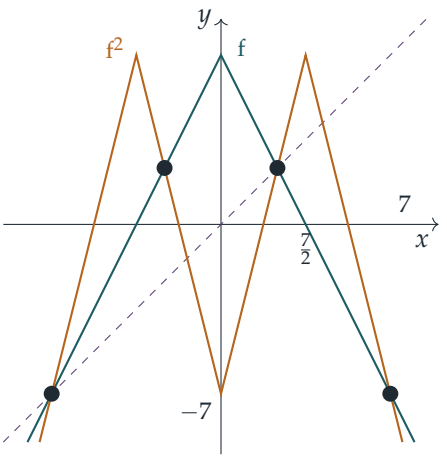
f^2를 구하려면 $\mathrm{f}(x)$의 부호를 알아야 한다. $0 \le x \le \frac{7}{2}$이면 $\mathrm{f}(x) = 7 - 2x \ge 0$이므로

$$\mathrm{f}^2(x) = 7 - 2(7 - 2x) = 4x - 7.$$

$x \ge \frac{7}{2}$이면 $\mathrm{f}(x) \le 0$이므로 $|\mathrm{f}(x)| = 2x - 7$이고

$$\mathrm{f}^2(x) = 7 - 2(2x - 7) = 21 - 4x.$$

따라서 $y = \mathrm{f}^2(x)$는 W자 모양이다. $x = 0$에서 값이 -7이고, $x = \pm\frac{7}{2}$(정확히 f의 값이 0이 되는 곳)에서 높이 7인 봉우리를 가지며, 기울기는 ± 4이고, x절편은 $\pm\frac{7}{4}$와 $\pm\frac{21}{4}$이다. $7 - 2x = 4x - 7$과 $7 - 2x = 21 - 4x$를 풀면 두 그래프가 $(\pm\frac{7}{3}, \frac{7}{3})$과 $(\pm 7, -7)$에서 만남을 알 수 있다.



(청록색: $y = \mathrm{f}(x)$, 호박색: $y = \mathrm{f}^2(x)$, 점선: $y = x$.)

(b) 네 조각 각각에서 방정식을 풀고, 알맞은 범위에 있는 근만 남긴다.

- $0 \le x \le \frac{7}{2}$: $4x - 7 = x$에서 $x = \frac{7}{3}$이고, 이는 범위 안에 있다.
- $x \ge \frac{7}{2}$: $21 - 4x = x$에서 $x = \frac{21}{5} = 4.2$이고, 범위 안에 있다.
- $-\frac{7}{2} \le x \le 0$: 여기서는 $\mathrm{f}^2(x) = -4x - 7$이고, $-4x - 7 = x$에서 $x = -\frac{7}{5}$이며, 범위 안에 있다.
- $x \le -\frac{7}{2}$: 여기서는 $\mathrm{f}^2(x) = 21 + 4x$이고, $21 + 4x = x$에서 $x = -7$이며, 범위 안에 있다.

따라서 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = x$의 해는 정확히 네 개이다.

$$x = -7, \quad -\frac{7}{5}, \quad \frac{7}{3}, \quad \frac{21}{5}.$$

(c) 수열의 주기(period)가 2인 것은 $u_2 = u_0$, 즉 $\mathrm{f}^2(a) = a$이면서 $u_1 \ne u_0$, 즉 $\mathrm{f}(a) \ne a$일 때와 정확히 같다.

? 생각해 보기 (b)의 네 답이 모두 주기가 2인 수열을 만드는가?

그렇지 않다. 그중 둘은 f 자체의 고정점(fixed point)이다. $f(\frac{7}{3}) = 7 - \frac{14}{3} = \frac{7}{3}$이고 $f(-7) = 7 - 14 = -7$이다. 이들은 주기가 1인 상수수열을 만든다. 나머지 둘은 서로 자리를 바꾼다.

$$f(-\tfrac{7}{5}) = 7 - \tfrac{14}{5} = \tfrac{21}{5}, \qquad f(\tfrac{21}{5}) = 7 - \tfrac{42}{5} = -\tfrac{7}{5}.$$

따라서 수열의 주기가 2인 것은 $a = -\frac{7}{5}$ 또는 $a = \frac{21}{5}$일 때와 정확히 같다.

(d) $a = \frac{28}{5}$이면

$$u_1 = 7 - \tfrac{56}{5} = -\tfrac{21}{5}, \qquad u_2 = 7 - \tfrac{42}{5} = -\tfrac{7}{5}, \qquad u_3 = f(-\tfrac{7}{5}) = \tfrac{21}{5}.$$

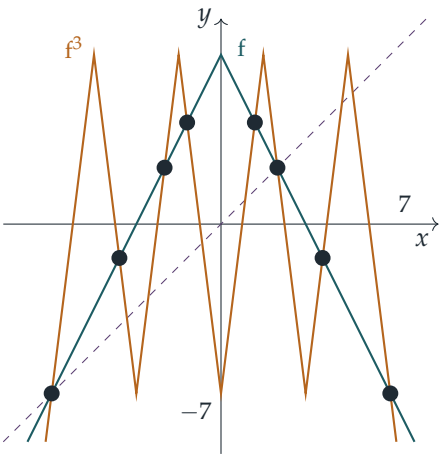
u_2부터는 이 수열이 (c)에서 $-\frac{7}{5}$로 시작하는 수열과 같으므로, $u_2, u_3, u_4, \ldots$는 $-\frac{7}{5}, \frac{21}{5}, -\frac{7}{5}, \ldots$이고 주기가 2이다. 마지막으로 $u_0 = \frac{28}{5}$와 $u_1 = -\frac{21}{5}$는 모두 $u_2 = -\frac{7}{5}$와도, $u_3 = \frac{21}{5}$와도 다르다. ($u_0 \neq u_2$와 $u_1 \neq u_3$만이 아니라 네 쌍을 모두 확인해야 한다.) 이것으로 요구한 바가 보여졌다.

소문항 (ii)

(a) 이제 $f^2(x)$에 f를 적용하되, f^2의 각 조각을 부호가 바뀌는 지점인 $x = \frac{7}{4}$와 $x = \frac{21}{4}$에서 나눈다. $x \geq 0$일 때

$$f^3(x) = 7 - 2\left|f^2(x)\right| = \begin{cases} 7 + 2(4x - 7) = 8x - 7, & 0 \leq x \leq \frac{7}{4}, \\ 7 - 2(4x - 7) = 21 - 8x, & \frac{7}{4} \leq x \leq \frac{7}{2}, \\ 7 - 2(21 - 4x) = 8x - 35, & \frac{7}{2} \leq x \leq \frac{21}{4}, \\ 7 + 2(21 - 4x) = 49 - 8x, & x \geq \frac{21}{4}. \end{cases}$$

이다. 따라서 그래프는 기울기 ± 8로 -7과 7 사이를 지그재그로 오르내린다. 골은 $(0, -7)$과 $(\pm\frac{7}{2}, -7)$에, 봉우리는 $(\pm\frac{7}{4}, 7)$과 $(\pm\frac{21}{4}, 7)$에 있고, $|x| > \frac{21}{4}$에서는 아래로 내려간다. 각 조각과 $7 - 2x$를 같다고 놓고 풀면, 이 그래프는 $y = f(x)$와 $(\pm\frac{7}{5}, \frac{21}{5})$, $(\pm\frac{7}{3}, \frac{7}{3})$, $(\pm\frac{21}{5}, -\frac{7}{5})$, $(\pm 7, -7)$에서 만난다.



(청록색: $y = \mathrm{f}(x)$, 호박색: $y = \mathrm{f}^3(x)$, 점선: $y = x$.)

(b) $a = 1$에서 시작하면 $u_1 = 7 - 2 = 5$, $u_2 = 7 - 10 = -3$, $u_3 = 7 - 6 = 1$이다. $a = -\frac{7}{9}$에서 시작하면

$$u_1 = 7 - \tfrac{14}{9} = \tfrac{49}{9}, \qquad u_2 = 7 - \tfrac{98}{9} = -\tfrac{35}{9}, \qquad u_3 = 7 - \tfrac{70}{9} = -\tfrac{7}{9}.$$

이다. 따라서 두 수열 모두 세 단계 뒤에 처음 값으로 돌아온다. 즉 이들은 3-주기 궤도(3-cycle) $1 \to 5 \to -3 \to 1$과 $-\frac{7}{9} \to \frac{49}{9} \to -\frac{35}{9} \to -\frac{7}{9}$이다.

3-주기 궤도의 모든 항은 시작값뿐 아니라 모두 $\mathrm{f}^3(x) = x$를 만족하므로, 이로부터 여섯 개의 해 1, 5, -3, $-\frac{7}{9}$, $\frac{49}{9}$, $-\frac{35}{9}$를 얻는다. 또한 f의 고정점(fixed point)은 모두 $\mathrm{f}^3(x) = x$를 만족하므로, 소문항 (i)에서 구한 $\frac{7}{3}$과 -7이 더해진다. 이렇게 해서 서로 다른 해가 여덟 개가 된다.

? **생각해 보기** 해가 더 없다는 것은 어떻게 알 수 있을까?

(ii)(a)의 식을 보면 f^3은 여덟 개의 직선 조각($x \geq 0$에서 네 개, 그리고 이들의 대칭상)으로 이루어져 있고, 각 조각의 기울기는 ± 8이다. 어떤 조각도 $y = x$와 평행하지 않으므로 각 조각은 직선 $y = x$와 많아야 한 번 만나고, 따라서 해는 많아야 여덟 개이다. 여덟 개를 모두 찾았으므로 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))) = x$의 해 전체는

$$x = -7, \quad -\tfrac{35}{9}, \quad -3, \quad -\tfrac{7}{9}, \quad 1, \quad \tfrac{7}{3}, \quad 5, \quad \tfrac{49}{9}.$$

이다. (그림도 이와 일치한다. 점선은 여덟 개의 호박색 선분과 각각 한 번씩 만난다.)

(c) (i)(d)의 아이디어를 그대로 따라 3-주기 궤도에서 거꾸로 거슬러 올라간다. $\mathrm{f}(y) = c$는 $|y| = \frac{1}{2}(7 - c)$를 뜻하므로, $c < 7$인 모든 c는 정확히 두 개의 원상(preimage) $\pm\frac{1}{2}(7 - c)$를 가진다. 궤도 $1 \to 5 \to -3 \to 1$에서 $u_3 = 1$로 잡자. 궤도 안에 있는 1의 원상은 -3이므로,

궤도를 벗어나기 위해 다른 원상 $u_2 = 3$을 택한다. 이 값은 궤도에 속하지 않는다. 그러면

$\mathrm{f}(u_1) = 3 \;\Rightarrow\; |u_1| = 2, \quad u_1 = 2$로 택하고; $\qquad \mathrm{f}(u_0) = 2 \;\Rightarrow\; |u_0| = \frac{5}{2}, \quad u_0 = \frac{5}{2}$로 택한다.

따라서 $a = \frac{5}{2}$가 조건을 만족한다. 앞으로 계산해 확인하면

$$\tfrac{5}{2},\ 2,\ 3,\ 1,\ 5,\ -3,\ 1,\ 5,\ -3,\ \ldots$$

이다. u_3부터 수열은 궤도 $1, 5, -3$을 돌며 주기가 3이고, $u_0, u_1, u_2 = \frac{5}{2}, 2, 3$은 모두 1, 5, -3과 다르다.

(다른 선택도 가능하다. 예를 들어 $a = -\frac{5}{2}$ 또는 $a = \pm\frac{9}{2}$는 $u_1 = -2$로 이어지고, $a = \frac{3}{2}$는 $u_2 = -1$을 거쳐 $u_3 = 5$에서 궤도에 들어간다.)

검산

- 주장한 각 해는 손으로 반복 계산해 볼 수 있다. 예를 들어 $\frac{49}{9} \to -\frac{35}{9} \to -\frac{7}{9} \to \frac{49}{9}$이고, $\frac{28}{5} \to -\frac{21}{5} \to -\frac{7}{5} \to \frac{21}{5} \to -\frac{7}{5}$이다.
- 컴퓨터로 $-30 \le x \le 30$ 범위에서 $\mathrm{f}^3(x) - x$를 조사하면 부호가 바뀌는 곳은 -7, -3.889, -3, -0.778, 1, 2.333, 5, 5.444 근처뿐이며, 이는 여덟 개의 해와 일치한다. 같은 방법으로 $\mathrm{f}^2(x) - x$를 조사하면 -7, -1.4, 2.333, 4.2만 나온다.
- 개수 확인: f^n은 기울기가 $\pm 2^n$인 일차 조각 2^n개로 이루어지므로 $\mathrm{f}^n(x) = x$의 해는 2^n개이다. $n = 2$이면 $4 = 2 + 2$(고정점 두 개와 2-주기 궤도 하나)이고, $n = 3$이면 $8 = 2 + 3 + 3$(고정점 두 개와 3-주기 궤도 두 개)이다.

흔한 실수

- (i)(c)에서 (i)(b)의 해 네 개를 모두 답하는 것. 고정점은 주기가 1이다.
- (ii)(b)에서 1과 $-\frac{7}{9}$만 적거나, 고정점 $\frac{7}{3}$과 -7도 $\mathrm{f}^3(x) = x$를 만족한다는 사실을 잊는 것.
- 그림에서 그래프가 만나는 위치를 잘못 그리는 것. 교점을 대수적으로 구하면 이를 바로잡을 수 있다.

STEP 너머

이 문제는 이산 동역학계(discrete dynamical system)를 처음 맛보는 경험이다. f는 기울기가 2인 텐트 사상(tent map)이므로 f^n은 2^n개의 조각으로 이루어지고, 따라서 모든 주기의 주기점이 존재하며, 이 사상은 혼돈(chaos) 현상의 대표적인 예이다. 샤르코프스키

정리(Sharkovskii's theorem)에 따르면 실직선 위의 연속 사상이 주기 3인 점을 가지면 모든 주기의 점을 가져야 한다. 이것이 바로 "주기 3은 혼돈을 뜻한다(period three implies chaos)"라는 유명한 표어이다. Strogatz의 *Nonlinear Dynamics and Chaos*(비선형 동역학과 혼돈)는 반복 사상을 읽기 쉽게 소개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.