풀이

STEP III 2025, 문제 10

역학 • 움직이는 널빤지 위의 마찰

> **STEP III 2025, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

핵심 아이디어

먼저 h에 대한 미분방정식(differential equation)을 푼다. 이것은 단진동(simple harmonic motion)이며, 판자의 경사각이 일정한 비율 ω로 증가한다는 것을 알려 준다. 각이 정해지면 입자의 위치는 판자를 따라 일정한 비율만큼 간 지점이므로, 두 번 미분하면 가속도를 얻는다. 그다음 힘은 뉴턴(Newton)의 제2법칙을 판자에 수직인 방향과 판자를 따른 방향으로 분해하여 구한다. 이렇게 하는 편이 수평 방향과 수직 방향으로 분해하는 것보다 훨씬 깔끔하다.

풀이

판자를 강체 막대(rigid rod)로, P를 입자로 모형화한다. 판자가 수평과 이루는 각을 θ라 하자.

소문항 (i)

방정식 $\ddot{\mathrm{h}} = -\omega^2 \mathrm{h}$의 일반해(general solution)는 $\mathrm{h} = a\cos\omega t + b\sin\omega t$이다. 조건 $\mathrm{h}(0) = 0$에서 $a = 0$이고, $\dot{\mathrm{h}}(0) = b\omega = \omega L$에서 $b = L$이므로

$$\mathrm{h}(t) = L\sin\omega t.$$

A의 높이가 h이고 판자의 길이가 L이므로 $\sin\theta = \mathrm{h}/L = \sin\omega t$이고, 따라서 $\theta = \omega t$이다($0 \le \omega t \le \frac{\pi}{2}$일 때이며, 이것이 운동 전체이다. 그 이후에는 A가 높이 L보다 높이 올라가야 하기 때문이다). 따라서 $A = (0, L\sin\omega t)$이고 $B = (L\cos\omega t, 0)$이다.

점 C는 A에서 B까지의 s배만큼 간 지점이므로 $C = A + s(B - A)$이다.

$$x = sL\cos\omega t, \qquad y = (1-s)L\sin\omega t.$$

첫 번째 식이 구하는 x좌표이고, 두 번째 식은 이에 대응하는 y좌표의 식이다.

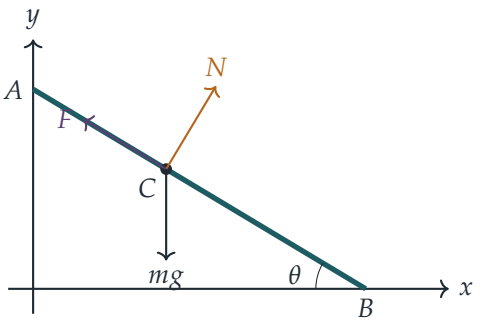
소문항 (ii)

t에 대하여 두 번 미분하면

$$\ddot{x} = -sL\omega^2 \cos \omega t, \qquad \ddot{y} = -(1-s)L\omega^2 \sin \omega t.$$

소문항 (iii)

P에 작용하는 힘은 아래 방향의 무게 mg, 판자에 수직인(위쪽) 수직항력(normal reaction) N, 그리고 판자를 따라 작용하는 마찰력(friction) F이다. 마찰력은 경사면 위쪽, 곧 A 쪽을 향할 때를 양으로 잡는다.



판자에 수직인(위쪽) 단위벡터(unit vector)는 $(\sin\theta, \cos\theta)$이고, 판자를 따라 A 쪽을 향하는 단위벡터는 $(-\cos\theta, \sin\theta)$이며, 여기서 $\theta = \omega t$이다. 운동방정식(equation of motion) $m(\ddot{x}, \ddot{y}) = N(\sin\theta, \cos\theta) + F(-\cos\theta, \sin\theta) + (0, -mg)$을 이 두 방향으로 분해하면(즉, 각 단위벡터와 내적(dot product)을 취하면) 다음과 같다.

판자에 수직인 방향.

$$\begin{aligned} N - mg\cos\theta &= m(\ddot{x}\sin\theta + \ddot{y}\cos\theta) \\ &= -mL\omega^2(s + (1-s))\sin\theta\cos\theta = -mL\omega^2 \sin\theta\cos\theta. \end{aligned}$$

$L\omega^2 = kg$를 대입하면

$$N = mg\cos\theta - mgk\sin\theta\cos\theta = mg(1 - k\sin\omega t)\cos\omega t,$$

이고, 이것이 구하는 식이다.

판자를 따라 A 쪽으로 향하는 방향.

$$\begin{aligned} F - mg\sin\theta &= m(-\ddot{x}\cos\theta + \ddot{y}\sin\theta) \\ &= mL\omega^2(s\cos^2\theta - (1-s)\sin^2\theta) = mgk(s - \sin^2\theta), \end{aligned}$$

여기서 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$을 이용하였다. 따라서

$$F = mgsk + mg\sin\theta(1 - k\sin\theta) = mgsk + \underbrace{mg(1 - k\sin\theta)\cos\theta}_{N}\tan\theta,$$

즉 $F = mgsk + N\tan\omega t$이며, 이것이 구하는 식이다. $N > 0$이면 언제나 F가 양수가 됨에 주목하라. 따라서 P가 판자에 눌려 있는 동안 마찰력은 항상 판자 위쪽으로 작용한다.

소문항 (iv)

$\mu = \tan\alpha$라 쓰자. $N > 0$인 동안, 입자가 미끄러지지 않고 C에 머무를 필요충분조건은 $|F| \le \mu N$이다. 이때 $F > 0$이므로 이 조건은 $F/N \le \tan\alpha$이다. 소문항 (iii)의 결과를 N으로 나누면

$$\frac{F}{N} = \frac{sk}{(1 - k\sin\theta)\cos\theta} + \tan\theta.$$

처음에는 $\theta = 0$이므로 $N = mg > 0$이고 $F/N = sk$이다. 따라서 $sk < \tan\alpha$이면 입자는 처음에 미끄러지지 않는다.

> **생각해 보기** 왜 N이 0이 되기 전에 비율 F/N이 결국 $\tan\alpha$에 도달해야 하는가?

이제 $sk < \tan\alpha$라 가정하자. 인수 $\cos\theta$는 $\theta = \frac{\pi}{2}$에서 0이 되고, $k > 1$이면 인수 $1 - k\sin\theta$가 그보다 먼저 $\sin\theta = 1/k$에서 0이 된다. $N = 0$이 되는 첫 각을 θ_0이라 하자($\frac{\pi}{2}$ 또는 $\arcsin(1/k)$). $0 \le \theta < \theta_0$에서 $N > 0$이고, F/N은 연속(continuous)이다. $\theta \to \theta_0^-$일 때 분모 $(1 - k\sin\theta)\cos\theta$는 양의 값을 거치며 0으로 가고 분자 sk는 고정된 양수이므로, 첫째 항은 $+\infty$로 발산한다(그리고 $\tan\theta$는 유계(bounded)이거나 역시 $+\infty$로 발산한다). 따라서 $F/N \to +\infty$이다.

즉 F/N은 $sk < \tan\alpha$에서 시작하여 N이 0에 도달하기 전에 한없이 커진다. 중간값 정리(intermediate value theorem)에 의해 $F/N = \tan\alpha$가 되는 첫 각 $\theta_1 < \theta_0$이 존재하고, 입자는 그때 미끄러지기 시작한다. 이는 N이 아직 양수인 각에서 일어나며, 이것이 첫 번째 주장이다.

이 각에서 $sk > 0$이고 $(1 - k\sin\theta_1)\cos\theta_1 > 0$이므로

$$\tan\alpha = \frac{F}{N} = \frac{sk}{(1 - k\sin\theta_1)\cos\theta_1} + \tan\theta_1 > \tan\theta_1.$$

α와 θ_1은 모두 $[0, \frac{\pi}{2})$에 속하고, 이 구간에서 tan은 증가하므로 $\theta_1 < \alpha$이다. 즉, 미끄러지기 시작할 때 판자가 수평과 이루는 각은 α보다 작다. 이것이 두 번째 주장이다.

두 번째 주장은 보기만큼 놀랍지 않다. 고정된 판자 위에 정지해 있는 입자는 판자의 각이 마찰각(angle of friction) α에 도달할 때 비로소 미끄러진다. 여기서는 판자가 가속하고 있고, 입자를 판자와 함께 움직이게 하는 데 필요한 추가적인 힘($mgsk$ 항) 때문에 마찰력이 더 일찍 한계에 이른다.

검산

- $t = 0$에서 판자는 수평이고 입자의 가속도는 수평 방향의 $(-sL\omega^2, 0)$이다. 그러면 $N = mg$와 $F = msL\omega^2 = mgsk$가 정확히 그 가속도를 만들어 내야 하는데, 실제로 그렇다.
- $\omega \to 0$이면(따라서 $k \to 0$이면) 판자를 매우 천천히 들어 올리는 것이다. 이때 $N \to mg\cos\theta$이고 $F \to mg\sin\theta$로, 고정된 경사면에서의 익숙한 평형값이 되며, 미끄러짐은 우리 부등식의 경계인 $\theta = \alpha$에서 일어난다.
- 수치적으로 $s = \frac{1}{2}$, $k = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$로 두고(따라서 $sk = \frac{1}{4} < 1$) $F/N = 1$을 풀면, $\theta \approx 0.545$ rad, 약 31°에서 미끄러짐이 일어나며, 이때 $N \approx 0.63mg > 0$이고 $\theta < 45°$이다. $sk < \tan\alpha$를 만족하는 s, k, α를 무작위로 수천 번 골라 컴퓨터로 확인한 결과, 매번 α보다 작은 각에서 $N > 0$인 채로 미끄러짐이 일어났다.

흔한 실수

- θ를 B에서의 각이 아니라 A에서의 각으로 잡는 것. 그러면 사인과 코사인이 서로 바뀌어 주어진 식이 나오지 않는다.
- 수평·수직 방향으로 분해한 뒤 곳곳에 $\sin\theta$와 $\cos\theta$가 들어간 연립방정식 두 개를 풀려고 하는 것. 판자를 따른 방향과 판자에 수직인 방향으로 분해하면 N과 F가 곧바로 분리된다.
- 소문항 (iv)에서 θ가 $\frac{\pi}{2}$에 가까워지는 경우만 따지고, $k > 1$일 때는 수직항력이 그보다 먼저 $\sin\theta = 1/k$에서 0이 된다는 것을 잊는 것.

STEP 너머

이 문제는 움직이는 좌표계(moving frame)에서의 힘에 관한 것이다. 판자의 관점에서 보면 입자는 점 C의 가속도에 $-m$을 곱한 것과 같은 추가적인 "가상의(fictitious)" 힘을 느끼며, 항 $mgsk$는 바로 처음 순간의 그 관성력이다. 대학에서는 이 아이디어가 원심력(centrifugal force)과 코리올리 힘(Coriolis force)을 포함하는, 가속 좌표계와 회전 좌표계에 대한 완전한 이론으로 발전한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 비관성 좌표계(non-inertial frame)를 많은 풀이 예제와 함께 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.