풀이

STEP III 2025, 문제 1

순수수학 • 베타 함수 적분

> **STEP III 2025, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

핵심 아이디어

여기서 쓰는 것은 모두 치환(substitution)이거나 항등식(identity) $x+(1-x)=1$이다. $x \mapsto 1-x$로 뒤집으면 p와 q의 역할이 서로 바뀌고, 피적분함수(integrand)를 $x+(1-x)$로 쪼개면 이웃한 값들 사이의 관계가 생긴다. $x=\sin^2\theta$로 놓으면 적분이 삼각함수의 적분으로 바뀌고, $x=t/(1+t)$로 놓으면 $[0,1)$이 $[0,\infty)$로 늘어난다. 마지막 적분은 앞의 결과들을 차례로 이어 붙여 계산하며, 결국 손으로 직접 계산할 수 있는 $\sin^4\theta$의 적분에 이른다.

풀이

소문항 (i)

$u=1-x$로 치환하면 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$이고, $x=0,1$은 각각 $u=1,0$에 대응한다.

$$\mathrm{b}(p,q)=\int_1^0 (1-u)^{p-1}u^{q-1}\,(-\mathrm{d}u)=\int_0^1 u^{q-1}(1-u)^{p-1}\,\mathrm{d}u=\mathrm{b}(q,p).$$

소문항 (ii)

우변의 두 적분을 더하면

$$\begin{aligned}\mathrm{b}(p+1,q)+\mathrm{b}(p,q+1)&=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}[x+(1-x)]\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x=\mathrm{b}(p,q),\end{aligned}$$

이고, 이를 정리하면 $\mathrm{b}(p+1,q)=\mathrm{b}(p,q)-\mathrm{b}(p,q+1)$이다.

이제 $q = p$로 놓자. 소문항 (i)에 의해 $\mathrm{b}(p, p+1) = \mathrm{b}(p+1, p)$이므로

$$\mathrm{b}(p+1,p) = \mathrm{b}(p,p) - \mathrm{b}(p+1,p) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{b}(p+1,p) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{b}(p,p).$$

소문항 (iii)

$x = \sin^2\theta$로 놓으면 $\mathrm{d}x = 2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$이고 $1 - x = \cos^2\theta$이다. θ가 0에서 $\frac{1}{2}\pi$까지 움직일 때 x는 0에서 1까지 증가하고, $\sin\theta$와 $\cos\theta$는 모두 음이 아니므로 부호 문제 없이 $x^{p-1} = (\sin\theta)^{2p-2}$, $(1-x)^{q-1} = (\cos\theta)^{2q-2}$이다. 따라서

$$\mathrm{b}(p,q) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin\theta)^{2p-2}(\cos\theta)^{2q-2} \cdot 2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}\,\mathrm{d}\theta.$$

두 번째 결과를 얻기 위해 $q = p$로 놓고 $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$를 이용하면

$$\mathrm{b}(p,p) = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\tfrac{1}{2}\sin 2\theta\right)^{2p-1}\mathrm{d}\theta = 2^{2-2p}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin 2\theta)^{2p-1}\,\mathrm{d}\theta = 2^{1-2p}\int_0^{\pi} (\sin\phi)^{2p-1}\,\mathrm{d}\phi,$$

이다. 여기서 $\phi = 2\theta$이다.

> ? **생각해 보기** $\mathrm{b}(p,\cdot)$처럼 생긴 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 위의 적분으로 어떻게 되돌아갈 수 있을까?

$[0,\pi]$에서 $\sin\phi$의 그래프는 $\phi = \frac{1}{2}\pi$에 대하여 대칭(symmetric)이므로($\phi \mapsto \pi - \phi$로 치환해 보면 된다), $[0,\pi]$ 위의 적분은 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 위의 적분의 두 배이다. 또 삼각함수 꼴에서 $q = \frac{1}{2}$로 놓으면 $(\cos\theta)^{2q-1} = (\cos\theta)^0 = 1$이므로

$$\mathrm{b}(p,\tfrac{1}{2}) = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin\theta)^{2p-1}\,\mathrm{d}\theta.$$

그러므로

$$\mathrm{b}(p,p) = 2^{1-2p}\cdot 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin\phi)^{2p-1}\,\mathrm{d}\phi = 2^{1-2p}\,\mathrm{b}(p,\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2^{2p-1}}\,\mathrm{b}(p,\tfrac{1}{2}),$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (iv)

t가 0에서 ∞까지 갈 때 x는 0에서 1까지 가고, $1-x$는 간단한 꼴이 되기를 바란다. $x = \dfrac{t}{1+t}$는 두 조건을 모두 만족하며,

$$1 - x = \frac{1}{1+t}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{(1+t)-t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}.$$

t가 0에서 ∞까지 증가할 때 x는 0에서 1을 향해 증가한다. 따라서

$$\mathrm{b}(p,q) = \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p-1}} \cdot \frac{1}{(1+t)^{q-1}} \cdot \frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,\mathrm{d}t.$$

소문항 (v)

피적분함수를 소문항 (iv)와 맞추어 보면 $p-1=\frac{3}{2}$이고 $p+q=6$이므로 $p=\frac{5}{2}, q=\frac{7}{2}$이다. 이 적분은 $\mathrm{b}(\frac{5}{2},\frac{7}{2})$이고, 이를 단계적으로 줄여 나간다.

$$\begin{aligned}
\mathrm{b}(\tfrac{5}{2},\tfrac{7}{2}) &= \mathrm{b}(\tfrac{7}{2},\tfrac{5}{2}) && \text{(i)에 의해}\\
&= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{b}(\tfrac{5}{2},\tfrac{5}{2}) && \text{(ii)에서} p=\tfrac{5}{2}\\
&= \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^4}\,\mathrm{b}(\tfrac{5}{2},\tfrac{1}{2}) && \text{(iii)에서} p=\tfrac{5}{2}.
\end{aligned}$$

마지막으로 삼각함수 꼴에서 $p=\frac{5}{2}, q=\frac{1}{2}$로 놓으면

$$\mathrm{b}(\tfrac{5}{2},\tfrac{1}{2}) = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

$\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$를 두 번 이용하면

$$\sin^4\theta = \tfrac{1}{4}(1-2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta) = \tfrac{1}{8}(3-4\cos 2\theta+\cos 4\theta).$$

코사인 항들은 $[0,\frac{1}{2}\pi]$에서 적분하면 0이 된다(그 부정적분(antiderivative)인 $\sin 2\theta$와 $\sin 4\theta$가 양 끝에서 모두 0이기 때문이다). 따라서 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}\pi = \frac{3\pi}{16}$이고 $\mathrm{b}(\frac{5}{2},\frac{1}{2})=\frac{3\pi}{8}$이다. 그러므로

$$\int_0^\infty \frac{t^{\frac{3}{2}}}{(1+t)^6}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{32}\cdot\frac{3\pi}{8} = \frac{3\pi}{256}.$$

검산

- $p=q=1$이면 정의에 의해 $\mathrm{b}(1,1)=1$이고, (ii)에 의해 $\mathrm{b}(2,1)=\frac{1}{2}$이다. 이는 $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$를 직접 계산한 값과 일치한다.
- 또 $p=1$이면 소문항 (iii)에 의해 $\mathrm{b}(1,1)=\frac{1}{2}\,\mathrm{b}(1,\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot 2=1$이다. 서로 일치한다.
- 수치적으로 $3\pi/256\approx 0.036816$이고, 컴퓨터로 $[0,\infty)$에서 $t^{3/2}/(1+t)^6$을 직접 수치 적분하면 소수점 아래 여러 자리까지 일치한다. 크기가 타당한지도 확인해 보자. 피적분함수는 $t=\frac{1}{3}$에서 최댓값 약 0.034를 가지며, 그 봉우리의 폭은 대략 1 정도이므로 값이 백분의 몇 정도라는 것은 그럴듯하다.

흔한 실수

- (iv)에서 $\mathrm{d}x$에서 나오는 인수 $(1+t)^{-2}$를 빠뜨려 지수를 $p+q-2$로 잘못 얻는 경우.

- (iii)에서 $(\sin 2\theta)^{2p-1}$을 θ에 대해 $[0, \frac{1}{2}\pi]$에서만 적분하면서, $\phi = 2\theta$로 놓으면 구간이 두 배가 되고 $\mathrm{d}\theta$가 절반이 된다는 것을 잊는 경우.
- (v)에서 p를 $\frac{3}{2} + 1$이 아니라 지수 $\frac{3}{2}$에 맞추는 경우.

STEP 너머

함수 $\mathrm{b}(p, q)$는 오일러(Euler)의 베타 함수(beta function)이며, 보통 $B(p, q)$로 쓴다. 베타 함수는 $B(p, q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$에 의해 감마 함수(gamma function)와 연결되며, 소문항 (iii)의 결과는 Γ에 대한 르장드르(Legendre)의 배적 공식(duplication formula)의 한 형태이다. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$를 이용하면 $3\pi/256$을 한 줄로 다시 얻을 수 있다. 베타 함수는 확률론에서도 베타 분포(beta distribution)의 정규화 상수(normalising constant)로 등장한다. 이러한 적분에 대해 더 알고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*를, 베타 분포에 대해서는 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.