풀이

STEP II 2025, 문제 9

역학 • 충돌과 포물체 운동

STEP II 2025, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

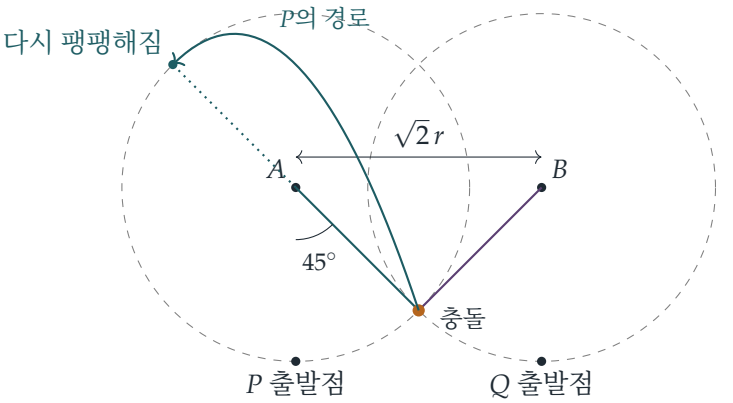
www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

핵심 아이디어

대칭(symmetry)이 대부분의 일을 해 준다. 두 입자는 AB의 수직이등분선(perpendicular bisector) 위에서 만나야 하므로, 충돌할 때의 위치와 속력이 정해진다. 충돌 직후 각 실은 느슨해지므로, 매달린 점으로부터의 거리가 다시 r이 될 때까지 각 입자는 보통의 포물체(projectile)이다. 이 거리 조건을 식으로 쓰면 t에 대한 사차방정식(quartic)이 나온다. 삼중근(triple root)에는 물리적 의미가 있다. 입자가 원을 따라 움직이면서 원에 도달하므로, 실이 충격 없이 팽팽해진다.

풀이

모형: P와 Q는 질량이 m인 입자이고(충돌에 대해서는 작고 매끄러운 구로 본다), 실은 가볍고 늘어나지 않으며, 공기 저항은 없다. A에 매달린 P를 왼쪽에 두고, A를 지나는 좌표축을 잡아 x는 수평 방향(B 쪽), y는 연직 위 방향으로 한다.



그림은 소문항 (iv)의 특수한 경우에 충돌 후 P가 날아가는 경로를 보여 준다. 이 경우 P는 반대쪽에서 수평보다 45° 위인 점에서 자신의 원으로 다시 돌아온다.

소문항 (i)

설정이 AB의 수직이등분선에 대해 대칭이므로, 두 입자는 그 위에서 만난다. 그때 각 입자는 가장 낮은 점에서 수평으로 $\frac{1}{2}\sqrt{2}\,r = r\sin 45^\circ$만큼 움직였으므로, 각 실은 연직 아래 방향과 45°를 이룬다. 각 입자는 $r - r\cos 45^\circ = r\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$만큼 올라갔다. 이 지점까지 실은 팽팽하고 장력(tension)은 일을 하지 않으므로, 에너지 보존(conservation of energy)에 의해 충돌 직전의 속력 v는 다음을 만족한다.

$$v^2 = u^2 - 2gr\left(1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = u^2 - gr(2 - \sqrt{2}).$$

(입자가 여기까지 오려면 $u^2 > gr(2-\sqrt{2})$이어야 한다.)

각 입자는 자신의 원을 따라 수평과 45°를 이루며 움직이므로

$$\text{속도}P = \left(\tfrac{v}{\sqrt{2}},\ \tfrac{v}{\sqrt{2}}\right), \qquad \text{속도}Q = \left(-\tfrac{v}{\sqrt{2}},\ \tfrac{v}{\sqrt{2}}\right).$$

두 입자는 같은 높이에서 만나므로 중심선은 수평이고, 둘 사이의 충격량(impulse)도 수평이다. 따라서 연직 성분은 변하지 않는다. 수평 방향으로는 운동량(momentum)의 크기가 같고 방향이 반대이므로, 충돌 전과 후 모두 합이 0이다. 그러면 뉴턴(Newton)의 반발 법칙(law of restitution)에 의해 각 입자는 다가올 때 속력의 e배로 튕겨 나간다. 충돌 직후

$$\text{수평 속력} = \frac{ev}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}ev\sqrt{2}, \qquad \text{연직 성분} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,v\ (\text{위쪽}),$$

이고, 이제 P는 Q에서 멀어지며 왼쪽으로 움직인다.

? **생각해 보기** 충돌하는 동안 실도 충격량을 가할 수 있을까?

그렇지 않다. 실은 당기기만 할 수 있고, 그것도 실을 따라서만 당긴다. 충돌 직후 P는 A에 대해 $\left(\frac{r}{\sqrt{2}}, -\frac{r}{\sqrt{2}}\right)$에 있고 속도는 $\left(-\frac{ev}{\sqrt{2}}, \frac{v}{\sqrt{2}}\right)$이다. 이 속도의 $\overrightarrow{AP}$ 방향 성분은 $-\frac{1}{2}(1+e)v < 0$이므로 P는 A 쪽으로 움직이고 있다. 실은 곧바로 느슨해지며, 충격 장력은 전혀 필요하지 않다.

소문항 (ii)

t를 충돌 순간부터 잰다. 실이 다시 팽팽해질 때까지 P는 포물체이므로, A에 대해

$$x = \frac{r}{\sqrt{2}} - \frac{ev}{\sqrt{2}}\,t, \qquad y = -\frac{r}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{2}}\,t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

실이 팽팽한 것은 정확히 $x^2 + y^2 = r^2$일 때이다. $\sqrt{2}\,x$와 $\sqrt{2}\,y$가 나타나도록 양변에 2를 곱하면

$$(r - evt)^2 + \left(-r + vt - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,gt^2\right)^2 = 2r^2.$$

이 식은 $t = 0$에서 성립하는데, 충돌 순간에는 실이 아직 팽팽하기 때문이다. 따라서 구하는 시각은 0이 아닌 근이다. 대칭에 의해 Q도 같은 순간에 같은 일을 겪는다. 두 입자는 수평으로 서로 멀어지므로, 그 전에 다시 충돌할 수는 없다.

소문항 (iii)

전개하고 $2r^2$을 소거하면

$$\tfrac{1}{2}g^2t^4 - \sqrt{2}\,gv\,t^3 + \big((1+e^2)v^2 + \sqrt{2}\,rg\big)t^2 - 2(1+e)rv\,t = 0.$$

$t \neq 0$으로 나누면 삼차식이 남는다. 이제

$$\frac{z}{c} = \frac{vt}{r}\cdot\frac{rg}{\sqrt{2}\,v^2} = \frac{gt}{\sqrt{2}\,v}, \qquad \text{따라서} \qquad t = \frac{\sqrt{2}\,v}{g}\cdot\frac{z}{c}.$$

이것을 대입하고 삼차식 전체를 $\sqrt{2}\,v^3/g$로 나눈다. $w = z/c$로 쓰면 각 항은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}g^2t^3 &\longrightarrow w^3,\\
-\sqrt{2}\,gv\,t^2 &\longrightarrow -2w^2,\\
\big((1+e^2)v^2 + \sqrt{2}\,rg\big)t &\longrightarrow \Big(1+e^2+\frac{\sqrt{2}\,rg}{v^2}\Big)w = \Big(\frac{2}{c}+1+e^2\Big)w,\\
-2(1+e)rv &\longrightarrow -\frac{\sqrt{2}\,rg}{v^2}(1+e) = -\frac{2}{c}(1+e),
\end{aligned}$$

여기서 $\dfrac{2}{c} = \dfrac{2rg}{\sqrt{2}\,v^2} = \dfrac{\sqrt{2}\,rg}{v^2}$를 이용하였다. 이것이 구하는 방정식이다.

$$\Big(\frac{z}{c}\Big)^3 - 2\Big(\frac{z}{c}\Big)^2 + \Big(\frac{2}{c}+1+e^2\Big)\Big(\frac{z}{c}\Big) - \frac{2}{c}(1+e) = 0.$$

소문항 (iv)

w에 대한 삼차식이 삼중근 α를 가지면, 그 식은 반드시 $(w-\alpha)^3 = w^3 - 3\alpha w^2 + 3\alpha^2 w - \alpha^3$이다. 계수를 비교하면

$$3\alpha = 2, \qquad 3\alpha^2 = \frac{2}{c}+1+e^2, \qquad \alpha^3 = \frac{2}{c}(1+e).$$

따라서 $\alpha = \frac{2}{3}$이다. $k = 2/c$로 두자. 그러면 $k = \frac{4}{3} - 1 - e^2 = \frac{1}{3} - e^2$이고, 마지막 식은 다음과 같이 된다.

$$\Big(\tfrac{1}{3} - e^2\Big)(1+e) = \tfrac{8}{27} \iff 27e^3 + 27e^2 - 9e - 1 = 0 \iff (3e-1)(9e^2+12e+1) = 0.$$

이차 인수의 근은 $\frac{-2\pm\sqrt{3}}{3}$으로 둘 다 음수이므로 반발계수(coefficient of restitution)가 될 수 없다. 따라서 $e = \frac{1}{3}$이다. 그러면 $k = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$이므로 $c = 9$이고,

$$v^2 = \frac{c\,rg}{\sqrt{2}} = \frac{9rg}{\sqrt{2}} = \tfrac{9}{2}\sqrt{2}\,rg,$$

가 되어 요구한 결과를 얻는다.

생각해 보기 중근(repeated root)은 운동에 대해 무엇을 말해 주는가?

$D(t) = x^2 + y^2 - r^2$이라 하자. 양의 인수를 제외하면 D는 $w(w-\alpha)^3$과 같다. 이는 $0 < w < \alpha$에서 음수이므로, 실이 팽팽해질 때까지 P는 자신의 원의 엄격한 내부에 머문다. α가 중근이므로 그곳에서 $D' = 0$이기도 하다. 그런데 $D' = 2(x\dot{x} + y\dot{y})$이므로, 그 순간 속도의 실 방향 성분은 0이다. 즉 입자는 원을 따라 움직이면서 도착한다. 충격 장력은 실을 따라 작용하며, 실 방향의 속도 성분을 없앨 때만 필요하다. 여기서는 그런 성분이 없으므로 충격량이 없고, 속도는 변하지 않으며, 운동 에너지도 잃지 않는다.

소문항 (v)

에너지는 충돌에서만 손실된다. 충돌 후 원의 가장 낮은 점에 이르기까지는 중력만 일을 한다. 날아가는 동안에는 장력이 없고, 실이 팽팽해질 때 충격이 없으며, 그 뒤에는 장력이 운동 방향에 수직이기 때문이다. 충돌 직후 속력의 제곱은

$$\frac{e^2v^2}{2} + \frac{v^2}{2} = \frac{(1+e^2)v^2}{2},$$

이고, 입자는 가장 낮은 점보다 $r\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$만큼 위에 있다. 따라서

$$U^2 = \frac{(1+e^2)v^2}{2} + gr\left(2-\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{9rg}{\sqrt{2}} + gr\left(2-\sqrt{2}\right)$$
$$= \frac{5\sqrt{2}}{2}rg + (2-\sqrt{2})rg = \left(2+\tfrac{3}{2}\sqrt{2}\right)rg = \frac{4+3\sqrt{2}}{2}rg.$$

내려가는 동안 실이 팽팽하게 유지되는지도 확인해야 한다. $w = \frac{2}{3}$일 때 $t = \frac{2\sqrt{2}v}{3g}$이다. 대입하면 위치는 $\left(-\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$, 속도는 $\left(-\frac{v}{3\sqrt{2}}, -\frac{v}{3\sqrt{2}}\right)$이다. 따라서 P는 B의 반대쪽에서 수평보다 45° 위인 점에서 자신의 원으로 다시 돌아오고, 이때 속력의 제곱은 $\frac{v^2}{9} = \frac{rg}{\sqrt{2}}$이다. 그 점에서 A 방향으로 힘을 분해하면

$$T + mg\sin 45^\circ = \frac{m}{r}\cdot\frac{rg}{\sqrt{2}} \quad\Longrightarrow\quad T = 0,$$

이므로 실은 장력이 0인 상태로 팽팽해진다. P가 아래로 흔들려 내려가면서 속력은 커지고 중력의 안쪽 방향 성분은 작아지므로, 그 이후로는 $T > 0$이다. 입자는 원을 따라 가장 낮은 점까지 내려가며, 이 점에서부터 에너지를 계산해도 같은 U^2 값을 얻는다: $\frac{rg}{\sqrt{2}} + 2gr\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(2+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)rg$.

검산

- $r = 1$, $g = 9.81$로 두고 비행과 원운동을 단계별로 컴퓨터 시뮬레이션한 결과 $U^2 \approx 40.430$을 얻었다. 이는 $\frac{1}{2}(4+3\sqrt{2})g \approx 40.430$과 일치하며, 원운동 내내 장력은 음이 아

니었다.

- U^2를 구하는 두 경로(충돌 지점에서 시작하는 것과 실이 팽팽해지는 지점에서 시작하는 것)의 결과가 일치한다.
- $e = 1/3$이고 $c = 9$이면 $w^3 - 2w^2 + \frac{4}{3}w - \frac{8}{27} = \left(w - \frac{2}{3}\right)^3$이 정확히 성립한다.

흔한 실수

- 올라간 높이를 $r - r\cos 45°$가 아니라 $r\cos 45°$(매달린 점 아래로의 깊이)로 잡는 것.
- 반발 법칙을 속도 전체에 적용하는 것. 영향을 받는 것은 중심선 방향(여기서는 수평) 성분뿐이다.
- e에 대한 삼차식의 음수 근을 배제하는 것을 잊는 것.

STEP 너머

중근 조건은 두 곡선(포물체의 포물선과 원)이 높은 차수로 접한다는 뜻이다. 두 곡선은 만나고, 접선을 공유하며, 여기서는 곡률(curvature)까지 공유한다. 이 때문에 실이 팽팽해지는 순간 장력이 정확히 0이 된다. 접촉 차수(order of contact)와 접촉원(osculating circle)은 대학 1학년의 곡선론과 미분기하학(differential geometry) 강의에 등장한다. 충격 구속(impulsive constraint)과 그것이 언제 에너지를 소산하는지는 동역학의 표준 주제이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 아이디어가 전개되는 모습을 보기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.