풀이

STEP II 2025, 문제 8

순수수학 • 정수의 균형 분할

> **STEP II 2025, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

핵심 아이디어

집합의 모든 원소를 같은 양 c만큼 평행이동(shift)하면 그 합과 제곱합(sum of squares)은 통제된 방식으로 변한다. 변화량은 원소의 개수와 원소의 합에만 의존하고, (제곱의 경우) 그 밖의 것에는 의존하지 않는다. 따라서 크기가 같은 두 집합의 합과 제곱합이 이미 같다면, 각각의 복사본을 하나씩 평행이동한 뒤 서로 맞바꾸어 더 큰 균형 분할(balanced partition)을 만들 수 있다. 소문항 (ii)는 이 사실의 뒤에 있는 대수적 계산이고, 소문항 (iii)과 (iv)는 그것을 두 가지로 활용한 것이다.

풀이

소문항 (i)

$1, 2, \ldots, 8$의 합은 36이고 제곱의 합은 204이므로, 각 절반은 합이 18, 제곱합이 102여야 한다.

8을 B에 넣자. 그러면 B의 나머지 세 원소는 합이 10이고 제곱의 합이 $102 - 64 = 38$이어야 한다. 1부터 7까지의 서로 다른 수 세 개로 합이 10인 것은

$$\{1,2,7\},\ \{1,3,6\},\ \{1,4,5\},\ \{2,3,5\},$$

이고, 각각의 제곱합은 54, 46, 42, 38이다. $\{2,3,5\}$만 조건을 만족하므로

$$A = \{1,4,6,7\}, \qquad B = \{2,3,5,8\}.$$

검산: $1+4+6+7 = 18 = 2+3+5+8$이고 $1+16+36+49 = 102 = 4+9+25+64$이다. (이 탐색으로부터, A와 B를 맞바꾸는 것을 제외하면 네 개씩으로 나누는 균형 분할은 이것뿐임도 알 수 있다.)

소문항 (ii)

이항정리(binomial theorem)로 각 세제곱을 전개하면

$$\sum_{k=1}^{m}(c+b_k)^3 = mc^3 + 3c^2\sum_{k=1}^{m} b_k + 3c\sum_{k=1}^{m} b_k^2 + \sum_{k=1}^{m} b_k^3,$$

이고, b_k 대신 a_k를 넣어도 마찬가지이다. 따라서

$$\begin{aligned}&\left(\sum a_k^3 + \sum(c+b_k)^3\right) - \left(\sum b_k^3 + \sum(c+a_k)^3\right)\\ &\qquad = 3c^2\left(\sum b_k - \sum a_k\right) + 3c\left(\sum b_k^2 - \sum a_k^2\right),\end{aligned}$$

이다. mc^3 항들이 소거되고, 두 개씩 있는 $\sum a_k^3$과 $\sum b_k^3$도 소거되기 때문이다. 가정에 의해 두 괄호는 모두 0이므로, 모든 실수 c에 대해 양변이 같다. 이것이 증명하려던 것이다.

같은 전개를 한 차수 낮추어 하면

$$\sum a_k^2 + \sum(c+b_k)^2 - \sum b_k^2 - \sum(c+a_k)^2 = 2c\left(\sum b_k - \sum a_k\right) = 0,$$

을 얻고, 일차의 경우에는 $\sum a_k + \sum(c+b_k) = \sum b_k + \sum(c+a_k)$이다. 양변이 모두 $mc + \sum a_k + \sum b_k$와 같기 때문이다.

소문항 (iii)

(i)의 균형 분할을 택하여 a_k가 $1,4,6,7$을, b_k가 $2,3,5,8$을 차례로 지나게 하고, $c=8$로 두자. 그러면 $c+a_k$는 $9,12,14,15$를, $c+b_k$는 $10,11,13,16$을 지난다. 이제

$$A = \{1,4,6,7\}\cup\{10,11,13,16\}, \qquad B = \{2,3,5,8\}\cup\{9,12,14,15\}.$$

로 놓는다. $\{1,\ldots,8\}$과 $\{9,\ldots,16\}$이 각각 두 집합에 나뉘어 들어가므로, 두 집합은 서로소(disjoint)이고, 각각 원소가 8개이며, 합집합은 $\{1,2,\ldots,16\}$이다.

> **생각해 보기** 왜 A의 평행이동한 복사본이 아니라 B의 평행이동한 복사본을 A에 넣을까?

그것이 바로 (ii)의 형태이기 때문이다. (ii)의 좌변은 $\sum a_k^3 + \sum(c+b_k)^3$으로, 우리가 만든 A의 세제곱합이고, 우변은 우리가 만든 B의 세제곱합이다. 따라서 $c=8$일 때의 (ii)로부터 세제곱합이 같다. (ii)의 끝에 있는 두 항등식으로부터 합과 제곱합도 같으므로, 이 분할은 균형 분할이기도 하다.

직접 계산하면, 두 절반 모두 합이 68, 제곱합이 748, 세제곱합이 9248이다.

소문항 (iv)

S의 원소를 $k = 0, 1, \ldots, 11$에 대해 $(n+k)^2$으로 쓰자. k 값들의 임의의 집합 K에 대해

$$\sum_{k\in K}(n+k)^2 = |K|\, n^2 + 2n\sum_{k\in K} k + \sum_{k\in K} k^2.$$

이다. 따라서 $\{0, 1, \ldots, 11\}$을 크기가 같고, 합이 같고, 제곱합이 같은 두 집합으로 나누면, 대응하는 제곱수들의 총합은 모든 n에 대해 같아진다.

주어진 $\{1, \ldots, 11\}$의 분할은 합이 같고(각각 33) 제곱합도 같지만(각각 253), 두 부분의 크기가 6과 5이다. 작은 쪽에 $k = 0$을 더하면 이 문제가 해결된다. 크기는 하나 늘어나고, 합과 제곱합에는 아무것도 더해지지 않기 때문이다. 그러므로

$$\{1, 3, 4, 5, 9, 11\} \quad \text{와} \quad \{0, 2, 6, 7, 8, 10\},$$

을 사용한다. 이 두 집합은 각각 크기가 6, 합이 33, 제곱합이 253이다. 따라서

$$C = \{(n+1)^2, (n+3)^2, (n+4)^2, (n+5)^2, (n+9)^2, (n+11)^2\},$$
$$D = \{n^2, (n+2)^2, (n+6)^2, (n+7)^2, (n+8)^2, (n+10)^2\}$$

의 원소의 합은 모두 $6n^2 + 66n + 253$이다. $n > 0$이므로 열두 개의 제곱수는 서로 다르고, 따라서 C와 D는 서로소이며 그 합집합은 S이다.

검산

- (iv)에서 $n = 1$이면 $C = \{4, 16, 25, 36, 100, 144\}$, $D = \{1, 9, 49, 64, 81, 121\}$이고, 둘 다 합이 $325 = 6 + 66 + 253$이다.
- (iii)에서 합 68과 제곱합 748은 1부터 16까지의 총합인 136과 1496의 절반이다. 세제곱합은 9248로, $136^2 = 18496$의 절반이다.
- $1, \ldots, 8$에서 네 개를 고르는 모든 경우를 컴퓨터로 탐색하면 (i)의 분할이 맞바꾸기를 제외하고 유일함을 확인할 수 있고, (iv)의 구성은 n이 499까지인 경우에 대해 확인하였다.

흔한 실수

- (iv)에서 주어진 A와 B를 그대로 쓰는 것: 크기가 6과 5로 다르므로 n^2 항이 소거되지 않는다. 빠진 원소 n^2(즉 $k = 0$)은 B 쪽에 들어가야 한다.
- (iii)에서 엉뚱한 절반을 평행이동하는 것: $\{9, 12, 14, 15\}$(평행이동한 a_k)를 $\{1, 4, 6, 7\}$과 묶어도 합과 제곱합은 여전히 같지만, 세제곱합은 $2\left(\sum b_k^3 - \sum a_k^3\right) = 2(672 - 624) = 96$만큼 차이가 난다.

STEP 너머

이것은 프루에-태리-에스콧 문제(Prouhet–Tarry–Escott problem)이다. 즉 정수의 집합을 두 부분으로 나누어 $j = 1, \ldots, k$에 대해 j제곱의 합이 같아지도록 하는 문제이다. (iii)의 평행이동 후 맞바꾸기를 $c = 16, 32, \ldots$로 반복하면 $\{0, 1, \ldots, 2^{k+1} - 1\}$의 투에-모스 분할(Thue–Morse partition)을 얻는데, 이 분할은 k제곱까지의 모든 거듭제곱 합을 같게 만든다. 그 증명은 (ii)의 이항 전개를 수학적 귀납법(induction)으로 수행하는 것이다. 대븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 이런 종류의 초등 정수론을 공부할 때 좋은 길잡이이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.