풀이

STEP II 2025, 문제 7

순수수학 • 비선형 미분방정식

> **STEP II 2025, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

핵심 아이디어

우변 $2x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$는 정확히 x^2을 t에 대해 미분한 도함수(derivative)이므로, 방정식을 한 번 적분하면 곧바로 1계 방정식(first-order equation) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 + C$를 얻는다. 초기 조건(initial condition)이 C를 결정하며, 세 소문항은 C의 세 가지 가능한 부호, 즉 0, 양수, 음수에 각각 해당한다. 이렇게 얻은 각 1계 방정식은 변수분리(separation of variables)로 풀 수 있고, 입자의 움직임은 그 식에서, 또는 아예 $x^2 + C$의 부호만 보고도 읽어 낼 수 있다.

풀이

한 번 적분하기

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x^2\right) = 2x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$이므로, 주어진 방정식은

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x^2\right), \qquad \text{따라서} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 + C$$

를 뜻한다. 여기서 C는 상수이다. $t = 0$일 때 $x = a$이므로, C는 초기 속도에서 a^2을 뺀 값이다. 세 소문항에서 각각 $C = 0$, $C = p^2$, $C = -q^2$이다.

소문항 (i)

이 경우 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2$이다. $x \neq 0$이면 속도가 양수이므로, x는 $a > 0$에서부터 증가하고 결코 0에 도달하지 않는다. 따라서 x^2으로 나누어 변수를 분리할 수 있다.

$$\int_a^x \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = t \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{a} - \frac{1}{x} = t \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{a}{1 - at}.$$

t가 0에서 $\frac{1}{a}$을 향해 증가함에 따라 입자는 양의 방향으로 점점 더 빠르게 움직이며(속도가 x^2이다), $t \to \frac{1}{a}$일 때 $x \to \infty$이다. 입자는 유한한 시간 $\frac{1}{a}$ 안에 무한대로 달아나며, 그 시간 이후로는 해가 존재하지 않는다.

소문항 (ii)

이제 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 + p^2$이고 이는 항상 양수이므로, 변수를 분리할 수 있다.

$$\int_a^x \frac{\mathrm{d}u}{u^2+p^2} = t \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{p}\left(\arctan\frac{x}{p} - \arctan\frac{a}{p}\right) = t.$$

$\alpha = \arctan\dfrac{a}{p}$로 놓으면, $a, p > 0$이므로 이 값은 $(0, \frac{\pi}{2})$에 속하고,

$$x = p\tan\left(pt + \alpha\right).$$

이 식은 $pt + \alpha < \frac{\pi}{2}$인 동안 성립한다. 입자는 이번에도 양의 방향으로 속력을 높여 가며 움직이고, $pt + \alpha \to \frac{\pi}{2}$일 때, 즉

$$t \to \frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{a}{p}\right) = \frac{1}{p}\arctan\frac{p}{a},$$

일 때 $x \to \infty$이다. 여기서 $\theta > 0$일 때 $\arctan\theta + \arctan\frac{1}{\theta} = \frac{\pi}{2}$임을 이용하였다. 따라서 입자는 유한한 시간 안에 무한대로 달아나며, 초기 속도가 더 크므로 예상대로 (i)보다 더 빨리 달아난다.

소문항 (iii)

이제

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 - q^2 = (x-q)(x+q).$$

$x = \pm q$에서 속도가 0이므로, 이 두 위치는 평형점(equilibrium)이다. $x^2 - q^2$의 부호만으로도 이미 전체 상황을 알 수 있다. 입자는 $x > q$일 때 오른쪽으로, $-q < x < q$일 때 왼쪽으로 움직인다. 따라서 답은 a와 q의 대소 관계에 따라 달라진다.

부분분수(partial fractions) $\dfrac{1}{x^2-q^2} = \dfrac{1}{2q}\left(\dfrac{1}{x-q} - \dfrac{1}{x+q}\right)$를 이용하여 변수를 분리하면

$$\frac{1}{2q}\ln\left|\frac{x-q}{x+q}\right| = t + \text{상수}.$$

양변에 지수함수를 취하고 $t = 0$에서 $x = a$라는 조건으로 상수를 정하면 다음을 예상할 수 있다.

$$\frac{x-q}{x+q} = Ke^{2qt}, \qquad K = \frac{a-q}{a+q}, \qquad \text{즉} \qquad x = q\,\frac{1+Ke^{2qt}}{1-Ke^{2qt}}.$$

모든 경우에 부호가 올바른지 확인하기 위해 이를 직접 검증하자. $E = Ke^{2qt}$로 놓으면 $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 2qE$이다. 그러면

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = q \cdot \frac{2\,\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}}{(1-E)^2} = \frac{4q^2E}{(1-E)^2}, \qquad x^2 - q^2 = q^2\,\frac{(1+E)^2 - (1-E)^2}{(1-E)^2} = \frac{4q^2E}{(1-E)^2},$$

이므로 두 식이 일치한다. $t = 0$에서 $1 + K = \frac{2a}{a+q}$, $1 - K = \frac{2q}{a+q}$이므로 $x = q \cdot \frac{a}{q} = a$이다. 따라서 $1 - E \neq 0$인 곳에서는 이 식이 해이다. $a > 0$이므로 $-1 < K < 1$임에 주목하자.

$a > q$인 경우. 이때 $0 < K < 1$이고 $E = Ke^{2qt}$는 K에서부터 증가한다. 입자는 양의 속도 $a^2 - q^2$으로 출발하여 양의 방향으로 점점 더 빠르게 움직인다. 분모 $1 - E$는 $e^{2qt} = \frac{1}{K}$일 때 0이 되므로

$$x \to \infty \quad \text{가 되는 것은} \quad t \to \frac{1}{2q}\ln\frac{a+q}{a-q}.$$

일 때이다. (i), (ii)에서와 마찬가지로 입자는 유한한 시간 안에 무한대로 달아난다.

$a = q$인 경우. 이때 $K = 0$이고 모든 t에 대해 $x = q = a$이다. 초기 속도가 0이고 가속도 $2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$도 0이므로, 입자는 $x = a$에 정지한 채로 머문다.

$0 < a < q$인 경우. 이때 $-1 < K < 0$이므로 $E < 0$이고, 분모 $1 - E > 1$은 결코 0이 되지 않는다. 따라서 해는 모든 $t \geq 0$에 대해 존재한다.

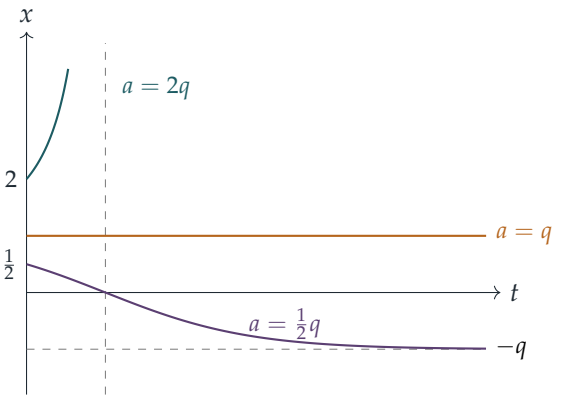
> **생각해 보기** 입자는 원점에서 멈추는가, 아니면 원점을 지나가는가? 그리고 결국 어디에 이르는가?

초기 속도 $a^2 - q^2$이 음수이므로 입자는 음의 방향으로 움직인다. 입자는 $E = -1$일 때, 즉 $t = \frac{1}{2q}\ln\frac{q+a}{q-a}$일 때 원점에 있으며, 그곳에서의 속도가 $-q^2 \neq 0$이므로 원점을 그대로 지나간다. $t \to \infty$일 때 $E \to -\infty$이고

$$x = q\,\frac{1+E}{1-E} \to -q.$$

이다. 전 과정에서 $|x| < q$이므로($E < 0$이면 $\frac{1+E}{1-E} \in (-1, 1)$이기 때문이다) 속도 $x^2 - q^2$은 계속 음수이다. 즉 입자는 꾸준히 왼쪽으로 움직이며 $x = -q$에 결코 도달하지 않은 채 그 값에 가까워진다. 입자의 속력 $q^2 - x^2$은 원점을 지날 때 최댓값 q^2이 되고, 그 뒤로는 점점 줄어 0에 가까워진다.

쌍곡선함수(hyperbolic function)로 나타내면 이 해들은 $a > q$일 때 $x = -q\coth\left(qt - \operatorname{arcoth}\frac{a}{q}\right)$, $a < q$일 때 $x = -q\tanh\left(qt - \operatorname{artanh}\frac{a}{q}\right)$이다. 아래 그림은 $q = 1$일 때 세 경우를 나타낸 것이다.



$a = 2q$와 $a = \frac{1}{2}q$에 대해 특별한 시각 $\frac{1}{2q}\ln 3$(점선으로 된 세로선)은 각각 폭발 시각과 원점을 지나는 시각이다.

검산

- (ii)에서 $p \to 0$으로 보내면 $p\tan(pt + \arctan\frac{a}{p}) \to \frac{a}{1-at}$이고 $\frac{1}{p}\arctan\frac{p}{a} \to \frac{1}{a}$이므로 (i)과 일치한다. $a > q$인 (iii)에서 $q \to 0$으로 보낼 때도 마찬가지이다.
- $x = \frac{a}{1-at}$를 미분하면 $\dot{x} = \frac{a^2}{(1-at)^2} = x^2$이고 $\ddot{x} = \frac{2a^3}{(1-at)^3} = 2x\dot{x}$이다.
- 원래의 2계 방정식을 수치적으로 한 단계씩 진행시켜 보면, 예를 들어 $a = 0.5, q = 1.4$일 때 $t = 1$에서 $x \approx -1.0814$, $t = 3$에서 $x \approx -1.3987$을 얻어 식과 일치하며, 예측한 대로 입자는 $t \approx 0.2669$에서 원점에 있다.

흔한 실수

- $2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$가 완전한 도함수라는 것을 알아차리지 못하고 $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$와 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 같은 치환을 시도하는 것. 이 방법도 통하지만 시간이 더 걸린다.
- (iii)에서 로그 안의 절댓값을 빠뜨려 $a < q$일 때 K의 부호를 잘못 구하는 것.
- 평형 상태인 $a = q$인 경우를 놓치거나, 입자가 $-q$에 가까워질 뿐인데 "$-q$에서 멈춘다"고 말하는 것.

STEP 너머

여기서 본 유한 시간 폭발(finite-time blow-up)은 비선형(nonlinear) 방정식의 대표적인 특징이다. $\dot{x} = x^2$은 우변이 완벽하게 매끄러운데도 해가 제한된 시간 동안만 존재하는

데, 이런 일은 선형(linear) 방정식에서는 결코 일어나지 않는다. 소문항 (iii)은 위상선 분석(phase-line analysis)을 처음으로 맛보는 예이다. 평형점 $x = q$(불안정(unstable))와 $x = -q$(안정(stable))가 모든 운동을 결정하며, 아무것도 풀기 전에 $x^2 - q^2$의 부호만으로 운동을 예측할 수 있다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 해의 존재성과 유일성(existence and uniqueness)을 포함하여 이 두 가지 아이디어를 모두 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.