풀이

# STEP II 2025, 문제 6

순수수학 • 포물선에 접하는 원

> **STEP II 2025, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

## 핵심 아이디어

여기서 다루는 원은 모두 중심이 $y$축 위에 있으므로 모든 것이 $x$에 대하여 대칭(symmetric)이고, "두 점에서 접한다"는 것은 $x_0 \neq 0$인 대칭인 한 쌍의 점 $(\pm x_0, y_0)$에서 접한다는 뜻이다. 접함(tangency)은 법선(normal)이 일치한다고 표현하면 가장 쉽게 다룰 수 있다. 즉 접점(point of contact)으로 가는 반지름이 다른 곡선의 법선 방향이어야 한다. 소문항 (i)과 (ii)에서 각각 $r^2$을 중심의 높이 $a$에 대한 식으로 얻고 나면, 소문항 (iii)은 두 근이 $a_1$과 $a_2$인 $a$에 대한 이차방정식(quadratic)에 관한 문제가 된다.

## 풀이

### 소문항 (i)

원이 포물선(parabola)에 $x_0 \neq 0$인 점 $P = (x_0, y_0)$에서 접한다고 하자. (포물선은 $x = 0$과 원점에서만 만나므로 서로 다른 두 접점이 모두 축 위에 있을 수는 없다. 또한 대칭성에 의해 $(x_0, y_0)$가 접점이면 $(-x_0, y_0)$도 접점이다.)

$P$에서 원의 법선은 반지름 방향, 즉 $(x_0,\, y_0 - a)$ 방향이다. 포물선을 $2ky - x^2 = 0$으로 쓰면, 그 법선은 기울기 벡터(gradient) $(-2x_0,\, 2k)$ 방향이다. 접한다는 것은 이 두 벡터가 평행하다는 뜻이다:

$$x_0 \cdot 2k - (y_0 - a)(-2x_0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x_0\,(k + y_0 - a) = 0.$$

$x_0 \neq 0$이므로 $y_0 = a - k$를 얻는다. 그러면 $P$는 포물선 위에 있으므로 $x_0^2 = 2ky_0 = 2k(a - k)$이고, $P$는 원 위에 있으므로

$$r^2 = x_0^2 + (y_0 - a)^2 = 2k(a - k) + k^2 = k(2a - k),$$

이 되어 원하는 결과가 성립한다.

역(converse)으로, $a > k > 0$이고 $r^2 = k(2a-k)$라 하자. $y_0 = a-k > 0$, $x_0 = \sqrt{2k(a-k)} > 0$으로 놓는다. 두 점 $(\pm x_0, y_0)$는 만든 방법에 의해 포물선 위에 있고, $x_0^2 + (y_0-a)^2 = 2k(a-k)+k^2 = r^2$이므로 원 위에도 있다. 이 각 점에서 법선 $(\pm x_0, -k)$와 $(\mp 2x_0, 2k)$는 평행하므로, 두 곡선은 그 점에서 접선을 공유한다. 따라서 $x_0 \neq 0$이므로 원은 포물선과 서로 다른 두 점에서 접한다.

(검증 삼아, $x^2 = 2ky$를 원의 방정식에 대입하면 $y^2 - 2(a-k)y + (a-k)^2 = 0$, 즉 $(y-(a-k))^2 = 0$을 얻는다. 이는 중근(repeated root)이며, 접함을 나타내는 대수적 표지이다.)

**소문항 (ii)**

직선 $y = c + x$, 즉 $x - y + c = 0$은 중심 $(0, a)$로부터의 거리가 $r$과 같을 때, 그리고 그때에만 원에 접한다:

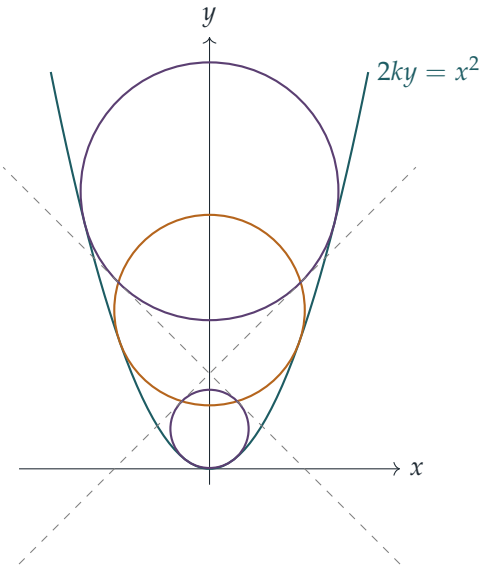
$$r = \frac{|0 - a + c|}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad r^2 = \frac{(a-c)^2}{2}.$$

직선 $y = c - x$는 $y$축에 대하여 대칭인 직선이므로 같은 조건을 준다.

접점은 $(0, a)$에서 내린 수선의 발(foot of the perpendicular)이다. 반지름은 직선에 수직이므로 방향이 $(1, -1)$이다. $(0, a)$에서 $t(1, -1)$만큼 이동하여 $y = c + x$ 위에 도달한다고 하면 $a - t = c + t$이므로 $t = \frac{a-c}{2}$이다. $y = c + x$와의 접점은

$$\left(\tfrac{a-c}{2},\ \tfrac{a+c}{2}\right),$$

이고, 대칭성에 의해 $y = c - x$와의 접점은 $\left(-\tfrac{a-c}{2},\ \tfrac{a+c}{2}\right)$이다.



$k = 1, c = 3$인 경우: 포물선, 이에 접하는 두 원 $C_1, C_2$(자주색)와 직선 $y = 3 \pm x$(점선), 그리고 소문항 $(iii)(b)$의 원(호박색).

### 소문항 (iii)(a)

각 원은 포물선과 두 점에서 접하므로 소문항 (i)에 의해 $r_i^2 = k(2a_i - k)$이다. 또 각 원은 직선 $y = c \pm x$에 접하므로 소문항 (ii)에 의해 $r_i^2 = \frac{1}{2}(a_i - c)^2$이다. 두 식을 같게 놓으면

$$(a_i - c)^2 = 2k(2a_i - k) \quad \Longrightarrow \quad a_i^2 - 2(c + 2k)\, a_i + c^2 + 2k^2 = 0.$$

따라서 $a_1$과 $a_2$는 모두 이차방정식 $a^2 - 2(c + 2k)a + c^2 + 2k^2 = 0$을 만족한다. $a_1 \neq a_2$이므로 이 둘이 이 방정식의 두 근(root)이고, 따라서

$$a_1 + a_2 = 2c + 4k, \qquad a_1 a_2 = c^2 + 2k^2.$$

이다. 그러면

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 &= (a_1 + a_2)^2 - 2a_1 a_2 \\ &= 4c^2 + 16kc + 16k^2 - 2c^2 - 4k^2 \\ &= 2c^2 + 16kc + 12k^2, \end{aligned}$$

이므로 (a)가 증명된다.

### 소문항 (iii)(b)

소문항 (ii)에 의해 $C_i$ 위의 접점은 $(\pm\frac{a_i - c}{2},\ \frac{a_i + c}{2})$이다. $u_i = a_i - c$로 쓰면 더 깔끔하다. 그러면 접점은 $(\pm\frac{u_i}{2},\ c + \frac{u_i}{2})$이다.

> **생각해 보기** 네 점을 지나는 원 하나를 찾아야 하는데, 미지수는 $d$와 $p$ 두 개뿐이다. $a_1$과 $a_2$를 직접 구하지 않고 어떻게 이 값들을 결정할 수 있을까?

네 점은 대칭인 두 쌍이고, 중심이 $y$축 위에 있는 원은 모두 대칭이므로, $u = u_1$과 $u = u_2$에 대해 원이 $(\frac{u}{2}, c + \frac{u}{2})$를 지나게 하면 충분하다. 이 조건은

$$\frac{u^2}{4} + \left(c - d + \frac{u}{2}\right)^2 = p^2 \quad \Longleftrightarrow \quad u^2 + 2(c - d)\, u + 2(c - d)^2 - 2p^2 = 0. \qquad (*)$$

이다. 한편 (a)의 이차방정식에 $a = u + c$를 대입하면

$$u^2 - 4k\, u + 2k^2 - 4kc = 0, \qquad (**)$$

를 얻는데, 이 방정식의 근이 바로 $u_1$과 $u_2$이며, $a_1 \neq a_2$이므로 이 둘은 서로 다르다. 원이 네 점을 모두 지나는 것은 $u_1$과 $u_2$가 모두 $(*)$의 근일 때, 그리고 그때에만이다. 서로 다른 두 근

이 같은, 최고차항의 계수가 1인 이차식(monic quadratic) 두 개는 서로 같으므로, $(**)$와 계수를 비교하면

$$2(c-d) = -4k \quad \Longrightarrow \quad d = c + 2k,$$

이고, 그러면 $2(c-d)^2 - 2p^2 = 8k^2 - 2p^2 = 2k^2 - 4kc$이므로

$$p^2 = 3k^2 + 2kc = k(3k + 2c).$$

이다.

#### 소문항 (iii)(c)

소문항 (i)의 역을 이용한다. $d = c + 2k$이면

$$k(2d - k) = k(2c + 3k) = p^2,$$

이므로, 이 원은 $a$ 대신 $d$를 넣은 $r^2 = k(2a - k)$의 꼴과 정확히 같다. 남은 것은 $d > k$임을 확인하는 일이다.

> **생각해 보기** (a)나 (b) 어디에서도 부등식이 언급되지 않았는데, $d > k$ 같은 부등식은 어디에서 나오는가?

이 부등식은 $C_1$과 $C_2$가 실제로 포물선과 두 점에서 접한다는 사실에서 나온다. 소문항 (i)에서 두 점에서 접한다는 조건 때문에 접점은 $y_0 = a - k$이고 $x_0^2 = 2k(a-k) > 0 (x_0 \neq 0$이므로)이어야 했으므로, $a_1 > k$이고 $a_2 > k$이다. 이 둘을 더하고 (a)를 이용하면

$$2c + 4k = a_1 + a_2 > 2k \quad \Longrightarrow \quad c > -k \quad \Longrightarrow \quad d = c + 2k > k.$$

따라서 $d > k > 0$이고 $p^2 = k(2d - k)$이므로, 소문항 (i)의 후반부에 의해 원 $x^2 + (y-d)^2 = p^2$은 포물선 $2ky = x^2$과 두 점, 즉 $(\pm\sqrt{2k(c+k)},\ c+k)$에서 접한다.

## 검산

$k = 1$, $c = 3$으로 놓자(위의 그림). (a)의 이차방정식은 $a^2 - 10a + 11 = 0$이므로 $a = 5 \pm \sqrt{14} \approx 8.742$와 $1.258$이다. 두 값의 합은 $10 = 2c + 4k$이고 제곱의 합은 $78 = 2 \cdot 9 + 16 \cdot 3 + 12$이다. (b)에서 $d = 5$, $p^2 = 9$를 얻는다. 원 $x^2 + (y-5)^2 = 9$는 $2y = x^2$과 $2y + (y-5)^2 = 9$, 즉 $(y-4)^2 = 0$인 곳에서 만난다. 이는 $y = 4$에서의 중근이므로, (c)의 예측대로 원은 $(\pm 2\sqrt{2}, 4)$에서 접한다. 네 접점 각각, 예를 들어 $(\frac{\sqrt{14}+2}{2}, \frac{\sqrt{14}+8}{2})$은 $(0,5)$로부터 거리가 3이다. 또한 조건을 만족하는 임의의 $k$와 $c$ 수백 쌍에 대해 컴퓨터로 모든 결과를 확인하였다.

## 흔한 실수

- (i)에서 접점이 $x_0 \neq 0$을 만족한다는 사실을 잊는 것. 이 사실 덕분에 $x_0$으로 나눌 수 있고, 또 이 사실에서 $a > k$가 나온다.
- (iii)(a)에서 $r^2 = k(2a - k)$만, 또는 $r^2 = \frac{1}{2}(a - c)^2$만 사용하는 것. $a$에 대한 이차방정식은 두 조건이 동시에 성립해야 한다는 데서 나온다.
- (iii)(c)에서 $p^2 = k(2d - k)$는 확인하고 $d > k$는 확인하지 않는 것. 이것이 없으면 그 "원"은 원점에서만 접하거나 아예 접하지 않을 수도 있다.

## STEP 너머

소문항 (i)에 의해, 중심이 $y$축 위에 있고 포물선과 두 번 접하는 원은 $x^2 + y^2 - k^2 - 2a(y - k) = 0$이다. 이는 매개변수 $a$에 대해 **일차**(*linear*)인 방정식이다. 이러한 원들의 모임을 원다발(pencil of circles) 또는 공축원계(coaxal system)라 하며, $C_1$, $C_2$와 (b)의 원은 모두 여기에 속한다. 법선을 일치시키는 것은 곡선 사이의 **접촉**(*contact*)이라는 개념으로 나아가는 첫 걸음이다. 곡선과 2차까지 접하는 원이 그 곡선의 곡률원(circle of curvature)이며, 곡선의 미분기하학(differential geometry) 첫 강의에서 만나게 된다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제)에는 이러한 정신의 STEP 스타일 좌표기하 문제가 훨씬 더 많이 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.