풀이

STEP II 2025, 문제 5

순수수학 • 치환적분

> **STEP II 2025, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

핵심 아이디어

여기서 다루는 적분은 모두 0에서 ∞까지의 적분이며, $x = u^{-m}$ 꼴의 치환(substitution)은 $[0, \infty)$를 양 끝을 서로 바꾸면서 자기 자신으로 옮긴다. $\mathrm{d}x$에서 나오는 음의 부호가 적분 구간의 뒤바뀜을 되돌리므로, 결국 다시 $[0, \infty)$ 위의 적분을 얻는다. 새 피적분함수(integrand)가 원래 피적분함수에 음의 부호를 붙인 것이라면, 적분은 자기 자신의 음수와 같으므로 0이다. 새 피적분함수가 같은 꼴의 다른 피적분함수의 상수배라면, 실제로 값을 계산하지 않고도 두 적분 사이의 관계를 얻는다. 소문항 (iii)과 (iv)에서는 지수(exponent)를 일반적인 문자로 두고, u의 거듭제곱이 상쇄되도록 그 값을 정한다.

풀이

이 풀이 전체에서, $m > 0$일 때 $x = u^{-m}$이라 하면 $u \to \infty$일 때 $x \to 0$이고 $u \to 0$일 때 $x \to \infty$이므로

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\infty^0 f(u^{-m})\,(-mu^{-m-1})\,\mathrm{d}u = \int_0^\infty f(u^{-m})\,mu^{-m-1}\,\mathrm{d}u.$$

이다. 이 식을 $m = 1$, $m = 2$일 때 사용하고, 이어서 일반적인 m에 대해 사용한다.

소문항 (i)

주어진 적분을 I라 하고 $x = u^{-1}$로 치환하자. 그러면 적분 구간을 다시 순서대로 놓았을 때 $\mathrm{d}x \to u^{-2}\,\mathrm{d}u$가 된다. $u > 0$에 대하여

$$x(x^3+1) = \frac{1}{u}\cdot\frac{1+u^3}{u^3} = \frac{u^3+1}{u^4}, \qquad \text{이므로} \qquad \sqrt{x(x^3+1)} = \frac{\sqrt{u^3+1}}{u^2},$$

이고

$$\sqrt{x}-1=\frac{1}{\sqrt{u}}-1=\frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u}}.$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}I&=\int_0^\infty \frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u}}\cdot\frac{u^2}{\sqrt{u^3+1}}\cdot\frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u=\int_0^\infty \frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u(u^3+1)}}\,\mathrm{d}u\\&=-\int_0^\infty \frac{\sqrt{u}-1}{\sqrt{u(u^3+1)}}\,\mathrm{d}u=-I.\end{aligned}$$

마지막 적분은 변수의 이름이 중요하지 않으므로 다시 I이다. 그러므로 $2I=0$이고, 요구한 대로 $I=0$이다.

이것이 피적분함수가 0이라는 뜻은 아님에 주의하자. 피적분함수는 $(0,1)$에서 음수이고 $(1,\infty)$에서 양수이며, 치환이 두 넓이를 정확히 맞대응시킨다.

소문항 (ii)

이번에는 $x=u^{-2}$로 치환하자. 그러면 적분 구간의 순서를 바로잡은 뒤 $\mathrm{d}x\to 2u^{-3}\,\mathrm{d}u$가 된다. $u>0$에 대하여

$$x^3+1=u^{-6}+1=\frac{1+u^6}{u^6},\qquad \sqrt{x^3+1}=\frac{\sqrt{u^6+1}}{u^3}.$$

이다. 따라서

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}}=\int_0^\infty \frac{u^3}{\sqrt{u^6+1}}\cdot\frac{2}{u^3}\,\mathrm{d}u=2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^6+1}},$$

이고, u를 x로 바꾸어 쓰면 이것이 요구한 결과이다.

소문항 (iii)

소문항 (i)은 $s=1$, $p=3$, $r=\frac{1}{2}$인 경우이므로, 같은 방법을 문자로 되풀이한다. 주어진 적분을 J라 하고 $x=u^{-1}$로 치환하면

$$x^s(x^p+1)=u^{-s}\cdot\frac{1+u^p}{u^p}=\frac{u^p+1}{u^{s+p}},\qquad \text{이므로}\qquad \sqrt{x^s(x^p+1)}=u^{-(s+p)/2}\sqrt{u^p+1},$$

이고, 또한 $x^r-1=(1-u^r)/u^r$이다. 따라서

$$J=\int_0^\infty \frac{(1-u^r)\,u^{-r}\,u^{(s+p)/2}\,u^{-2}}{\sqrt{u^p+1}}\,\mathrm{d}u=-\int_0^\infty \frac{(u^r-1)\,u^{(s+p)/2-r-2}}{\sqrt{u^p+1}}\,\mathrm{d}u.$$

이것을 다음과 같이 쓴 J 자신과 비교하자.

$$J=\int_0^\infty \frac{(u^r-1)\,u^{-s/2}}{\sqrt{u^p+1}}\,\mathrm{d}u.$$

생각해 보기 무언가를 계산하지 않고 u의 거듭제곱만 맞추어도 충분한 이유는 무엇인가?

u의 두 거듭제곱이 같으면 치환에 의해 J가 $-J$로 바뀌고, 소문항 (i)에서와 똑같이 $J=0$이 된다. 따라서

$$\frac{s+p}{2}-r-2=-\frac{s}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad r=s+\frac{p}{2}-2.$$

이어야 한다. 이 r의 값에 대하여 $J=-J$이므로 $J=0$이다. (문제에서 p와 s는 적분이 수렴(converge)하도록 주어진다고 했으며, $J=-J\Rightarrow J=0$이라는 논증에 필요한 것은 그것뿐이다.) 검산으로, $s=1$, $p=3$이면 $r=1+\frac{3}{2}-2=\frac{1}{2}$이고, 이것은 소문항 (i)이다.

소문항 (iv)

소문항 (ii)는 $k=2$, $p=3$, $q=6$인 경우였고, 이는 $x=u^{-2}$에서 나왔다. 그래서 $m>0$에 대하여 $x=u^{-m}$으로 치환해 보면 $\mathrm{d}x\to mu^{-m-1}\,\mathrm{d}u$이다. $x^p+1=(1+u^{mp})/u^{mp}$이므로

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^p+1}}=m\int_0^\infty \frac{u^{mp/2}\,u^{-m-1}}{\sqrt{u^{mp}+1}}\,\mathrm{d}u.$$

이다. 남는 u의 거듭제곱은

$$\frac{mp}{2}=m+1 \quad\Longleftrightarrow\quad p=2+\frac{2}{m},$$

일 때 사라지고, 이때 우변은 $q=mp=2m+2$에 대하여 $m\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^q+1}}$이다.

이제 $m=k$로 두자. 임의의 $k>0$에 대하여

$$p=2+\frac{2}{k}, \qquad q=2k+2$$

로 택하면

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^p+1}}=k\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^q+1}}.$$

이다. $k>0$이므로 두 지수는 모두 2보다 크다. 큰 x에서 피적분함수는 $x^{-p/2}$처럼 행동하므로, 이것이 바로 이 적분들이 수렴할 조건이다. 따라서 우리가 얻은 관계식의 적분들은 존재한다. $k=2$이면 소문항 (ii)의 $p=3$, $q=6$을 다시 얻고, $k=1$이면 자명한 경우인 $p=q=4$가 된다.

검산

- 수치적으로 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}}\approx 2.8044$이고 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^6+1}}\approx 1.4022$이므로, 소문항 (ii)의 말대로 정확히 절반이다.

- 소문항 (i)의 적분은 기계 정밀도(machine precision) 수준에서 0으로 계산된다. 음의 기여는 대부분 $x = 0$ 근처에서 나오고 양의 기여는 $(1, \infty)$에 얇게 퍼져 있는데도 그렇다.
- 조건을 만족하는 임의의 p와 s에 대하여, $r = s + \frac{p}{2} - 2$일 때 소문항 (iii)의 적분을 컴퓨터로 확인하면 0이 나왔다. r을 0.3만큼 바꾸면 분명히 0이 아닌 값이 나왔다.
- $k = \frac{1}{2}$이면 $(p = 6, q = 3)$ 소문항 (iv)의 관계식은 당연히 그래야 하듯이 소문항 (ii)를 거꾸로 읽은 것이 된다.

흔한 실수

- 치환하면 적분 구간이 뒤바뀐다는 사실을 잊는 것. $\mathrm{d}x$에서 나오는 음의 부호와 뒤바뀐 적분 구간이 서로 상쇄되는데, 둘 중 하나를 빠뜨리면 소문항 (i)에서 부호가 틀린다.
- 소문항 (iii)에서 일반적인 거듭제곱을 다룰 때 $u^{-s/2}$ 대신 $\sqrt{u^{-s}} = u^{-s}/2$라고 쓰는 것.
- 소문항 (iv)에서 모든 $k > 0$에 대한 함수로 p와 q를 제시하지 않고, 특정한 k에 대한 순서쌍 (p, q) 하나만 찾는 것.

STEP 너머

이 적분들은 모두 닫힌 꼴(closed form)로 계산할 수 있다. $t = x^p/(1 + x^p)$로 치환하면 $\int_0^\infty (1 + x^p)^{-1/2}\,\mathrm{d}x$는 $\frac{1}{p}\,\mathrm{B}(\frac{1}{p}, \frac{1}{2} - \frac{1}{p})$가 되는데, 여기서 B는 오일러(Euler)의 베타 함수(Beta function)이다. 이것을 감마 함수(Gamma function)와 결합하면 소문항 (iv)의 비를 명시적으로 얻는다. 적분을 자기 자신의 음수로 보내는 대칭 $x \mapsto 1/x$를 이용하는 기법은 해석학(analysis)과 복소 경로 적분(contour integration)에서 거듭 등장한다. 이상적분(improper integral)을 엄밀하게 다루는 내용, 특히 여기서 건너뛰어도 되었던 수렴 문제까지 보려면 Abbott, *Understanding Analysis*를 참고하라. STEP 스타일의 치환 기법을 더 많이 보려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.