풀이

STEP II 2025, 문제 4

순수수학 • 바닥 함수 항등식

> **STEP II 2025, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

핵심 아이디어

모든 것은 한 가지 사실에 바탕을 둔다. $\lfloor x \rfloor = m$이라는 것은 정확히 m이 $m \leq x < m+1$을 만족하는 정수라는 뜻이다. 소문항 (i)은 정수만큼의 평행이동이 바닥함수(floor function)를 그대로 통과한다는 것을 말한다. 이를 이용하면 f_n이 주기(period) $\frac{1}{n}$인 주기함수(periodic function)임을 알 수 있으므로, 짧은 구간 하나에서만 함수를 살펴보면 된다. 그 구간에서는 모든 항을 쉽게 계산할 수 있다. 소문항 (iii)은 사실 $n = 2$인 경우가 모습을 바꾼 것이며, 이 덕분에 무한급수가 연쇄적으로 소거(telescoping)된다.

풀이

소문항 (i)

$m = \lfloor x \rfloor$라 하면 m은 정수이고 $m \leq x < m+1$이다. 여기에 정수 n을 더하면

$$m + n \leq x + n < (m+n) + 1.$$

$m+n$은 정수이므로 $x+n$을 넘지 않는 가장 큰 정수이다. 따라서 $\lfloor x+n \rfloor = m+n = \lfloor x \rfloor + n$이며, 이것이 증명하려던 것이다.

소문항 (ii)(a)

$\mathrm{f}_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor - \lfloor nx \rfloor$로 쓰자. x를 $x + \frac{1}{n}$으로 바꾸면 합의 각 항이 한 칸씩 밀린다.

$$\mathrm{f}_n\left(x + \tfrac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor x + \tfrac{k}{n} \right\rfloor - \lfloor nx + 1 \rfloor.$$

합의 마지막 항은 $\lfloor x+1\rfloor = \lfloor x\rfloor + 1$이고, $\lfloor nx+1\rfloor = \lfloor nx\rfloor + 1$이다. 둘 다 소문항 (i)에서 $n=1$로 둔 것이다. 따라서

$$\mathrm{f}_n\left(x+\tfrac{1}{n}\right) = \lfloor x\rfloor + 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left\lfloor x+\tfrac{k}{n}\right\rfloor - \lfloor nx\rfloor - 1 = \mathrm{f}_n(x).$$

소문항 (ii)(b)

$0 \le t < \frac{1}{n}$이라 하자. $0 \le k \le n-1$이면

$$0 \le t + \tfrac{k}{n} < \tfrac{1}{n} + \tfrac{n-1}{n} = 1,$$

이므로 $\lfloor t+\frac{k}{n}\rfloor = 0$이다. 또한 $0 \le nt < 1$이므로 $\lfloor nt\rfloor = 0$이다. 모든 항이 0이므로 $\mathrm{f}_n(t) = 0$이다.

소문항 (ii)(c)

> **생각해 보기** (a)에서는 $\frac{1}{n}$만큼 위로 올라가는 것만 할 수 있다. $[0, \frac{1}{n})$보다 아래에 있는 x에는 어떻게 닿을 수 있을까?

점 $x-\frac{1}{n}$에서 (a)를 적용하면 $\mathrm{f}_n(x) = \mathrm{f}_n(x-\frac{1}{n})$을 얻으므로, 위로뿐 아니라 아래로도 이동할 수 있다. 수학적 귀납법(induction)에 의해, 양수이든 음수이든 모든 정수 m에 대하여 $\mathrm{f}_n(x+\frac{m}{n}) = \mathrm{f}_n(x)$이다.

이제 임의의 실수 x를 잡고 $m = \lfloor nx\rfloor$라 하면 $m \le nx < m+1$이다. $t = x - \frac{m}{n}$으로 두자. 양변을 $n>0$으로 나누면 $0 \le t < \frac{1}{n}$이다. 따라서 (b)에 의해

$$\mathrm{f}_n(x) = \mathrm{f}_n\left(t+\tfrac{m}{n}\right) = \mathrm{f}_n(t) = 0$$

이다. 그러므로 모든 x에 대하여 $\mathrm{f}_n(x) = 0$이며, 이는 다음 항등식(identity)이다.

$$\lfloor x\rfloor + \left\lfloor x+\tfrac{1}{n}\right\rfloor + \cdots + \left\lfloor x+\tfrac{n-1}{n}\right\rfloor = \lfloor nx\rfloor.$$

소문항 (iii)(a)

(ii)(c)에서 $n=2$로 두고 $\frac{x}{2}$에서 값을 구하면

$$0 = \mathrm{f}_2\left(\tfrac{x}{2}\right) = \left\lfloor \tfrac{x}{2}\right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{x}{2}+\tfrac{1}{2}\right\rfloor - \left\lfloor 2\cdot\tfrac{x}{2}\right\rfloor,$$

이고, 이를 정리하면 $\lfloor \frac{x}{2}\rfloor + \lfloor \frac{x+1}{2}\rfloor = \lfloor x\rfloor$이다.

소문항 (iii)(b)

생각해 보기 +1 하나만 들어 있는 (iii)(a)가 어떻게 $\left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$ 항을 다루는 데 도움이 될까?

분자와 분모를 2^k로 나눈다. $y = x/2^k$라 하면, (iii)(a)에서 x 대신 y를 써서

$$\left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{y+1}{2} \right\rfloor = \lfloor y \rfloor - \left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{k+1}} \right\rfloor,$$

을 얻는다. 따라서 $k = 0, 1, \ldots, K$에 대한 항들의 합은 연쇄적으로 소거된다.

$$S_K = \sum_{k=0}^{K} \left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{K+1}} \right\rfloor.$$

$K \to \infty$일 때 $x/2^{K+1} \to 0$이며, 답은 이 값이 0의 어느 쪽에서 다가가는지에 따라 달라진다.

- $x \geq 0$인 경우: $2^{K+1} > x$가 되는 순간부터 $0 \leq x/2^{K+1} < 1$이므로 마지막 바닥값은 0이고, 그 뒤로는 항상 $S_K = \lfloor x \rfloor$이다.
- $x < 0$인 경우: $2^{K+1} \geq -x$가 되는 순간부터 $-1 \leq x/2^{K+1} < 0$이므로 마지막 바닥값은 -1이고, 그 뒤로는 항상 $S_K = \lfloor x \rfloor + 1$이다.

어느 경우든 0이 아닌 항은 유한 개뿐이므로, 무한급수의 합은

$$\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{2^2} \right\rfloor + \cdots = \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & x \geq 0, \\ \lfloor x \rfloor + 1, & x < 0. \end{cases}$$

이다. 음이 아닌 정수 x에 대해서는 합이 그냥 x이다.

검산

$x = 7$을 넣어 보자. 항들은 $\lfloor 4 \rfloor = 4$, $\lfloor \frac{9}{4} \rfloor = 2$, $\lfloor \frac{11}{8} \rfloor = 1$, $\lfloor \frac{15}{16} \rfloor = 0$이고, 그 뒤의 항은 모두 0이다. 합은 $7 = \lfloor 7 \rfloor$이다. $x = -\frac{5}{2}$를 넣으면 항들은 $\lfloor -\frac{3}{4} \rfloor = -1$, $\lfloor -\frac{1}{8} \rfloor = -1$, $\lfloor \frac{3}{16} \rfloor = 0, \cdots$이다. 합은 $-2 = \lfloor -\frac{5}{2} \rfloor + 1$이며, 음수인 경우가 실제로 다르다는 것을 확인해 준다. (ii)에 대해서는 $n = 3$, $x = 1.5$일 때 $1 + 1 + 2 = 4 = \lfloor 4.5 \rfloor$이다. 무작위로 고른 유리수 x 2만 개와 $1 \leq n \leq 30$인 값들로 컴퓨터 검산을 해 본 결과, 문제의 모든 항등식과 연쇄 소거된 부분합이 모두 성립함을 확인하였다.

흔한 실수

- (ii)(c)에서 (a)를 위로 올라가는 데에만 사용하는 것. 이렇게 하면 $x \geq 0$인 경우는 다루지만 음수 x에 대해서는 아무것도 말해 주지 않는다.

- (iii)(b)에서 모든 x에 대해 $\lfloor x/2^{K+1} \rfloor \to 0$이라고 가정하는 것. 음수 x에 대해서는 이 값이 0이 아니라 -1로 고정된다.
- a와 b가 모두 정수가 아닌데 $\lfloor a+b \rfloor = \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor$라고 쓰는 것. 소문항 (i)이 바로 이것이 허용되는 경우이다.

STEP 너머

(ii)(c)의 항등식은 에르미트 항등식(Hermite's identity)이다. 이것은 초등 정수론(elementary number theory)의 핵심을 이루는 바닥함수 관련 결과들 가운데 하나이며, 그런 예로 $N!$을 나누는 소수(prime) p의 거듭제곱 지수를 구하는 르장드르 공식(Legendre's formula) $\sum_{k\geq 1} \lfloor N/p^k \rfloor$이 있다. (iii)(b)의 합도 무언가를 세고 있다. 양의 정수 x에 대하여 k번째 항은 1부터 x까지의 정수 가운데 2^k로는 나누어떨어지지만 2^{k+1}로는 나누어떨어지지 않는 정수의 개수이며, 각 정수는 정확히 한 번씩 세어진다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 이러한 아이디어가 실제로 쓰이는 모습을 보기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.