풀이

STEP II 2025, 문제 3

순수수학 • 거듭제곱의 비교

> **STEP II 2025, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

핵심 아이디어

a^b와 $b^a (a, b > 0)$를 비교하는 모든 문제는 양변에 로그(logarithm)를 취하고 ab로 나누면 $\frac{\ln a}{a}$와 $\frac{\ln b}{b}$를 비교하는 문제가 된다. 따라서 모든 것은 함수 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$의 그래프로 귀결된다. 이 그래프는 $x = \mathrm{e}$에서 단 하나의 최고점까지 올라갔다가 그 뒤로 내려간다. e의 같은 쪽에 있는 두 수는 쉽게 비교할 수 있지만, 서로 반대쪽에 있는 두 수를 비교하려면 $f(2) = f(4)$라는 절묘한 우연처럼 징검다리(stepping stone)가 필요하다.

풀이

이 풀이 전체에서 $x > 0$에 대하여 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$로 둔다. ln은 증가함수이므로, 양수 a, b에 대하여

$$a^b > b^a \iff b \ln a > a \ln b \iff \frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b} \iff f(a) > f(b),$$

이다. 여기서 $ab > 0$으로 나누었다. 모든 소문항에서 이 변환을 사용한다.

소문항 (i)

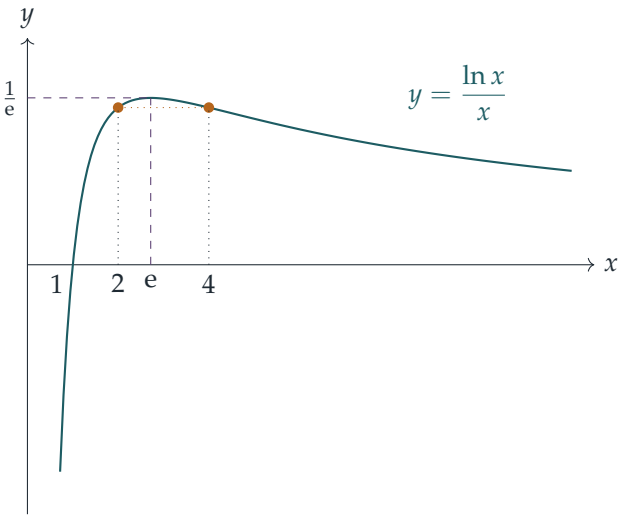
몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

이고, 이는 $0 < x < \mathrm{e}$에서 양수, $x > \mathrm{e}$에서 음수이다. 따라서 f는 $(0, \mathrm{e}]$에서 순증가(strictly increasing)하고 $[\mathrm{e}, \infty)$에서 순감소(strictly decreasing)하며, 최댓값은 $f(\mathrm{e}) = 1/\mathrm{e}$이다.

그 밖의 특징은 다음과 같다.

- $f(1) = 0$이고, $(0,1)$에서 $f < 0$, $(1,\infty)$에서 $f > 0$이다.
- $x \to 0^+$일 때 $\ln x \to -\infty$이고 $1/x \to +\infty$이므로 $f(x) \to -\infty$이다. 즉 y축이 점근선(asymptote)이다.
- $x \to \infty$일 때 $\ln x$가 x보다 느리게 증가하므로 $f(x) \to 0^+$이다. 즉 x축이 점근선이다.
- 한 번 더 미분하면 $f''(x) = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$이므로 $x = \mathrm{e}^{3/2} \approx 4.48$에서 변곡점(point of inflection)이 있다.



호박색 점들은 $f(2) = \frac{\ln 2}{2} = \frac{2\ln 2}{4} = f(4)$를 나타내며, 이는 소문항 (iii)에서 사용한다.

소문항 (ii)

(a) 위의 변환에 의해 $3^\pi > \pi^3 \iff f(3) > f(\pi)$이다. 3과 π는 모두 e보다 크고, f는 $[\mathrm{e},\infty)$에서 순감소한다. $3 < \pi$이므로 $f(3) > f(\pi)$이고, 따라서 $3^\pi > \pi^3$이다.

(b) 여기서 부등식은 $\left(\frac{9}{4}\right)^{\sqrt{5}} > \sqrt{5}^{9/4}$이고, 이는 $f\left(\frac{9}{4}\right) > f(\sqrt{5})$와 동치이다. 이번에는 두 수가 모두 e보다 작다. 실제로 $\sqrt{5} < \frac{9}{4} = 2.25 < \mathrm{e}$이며, $5 < \frac{81}{16}$이므로 $\sqrt{5} < \frac{9}{4}$이다. $(0,\mathrm{e}]$에서 함수 f는 순증가하므로 더 큰 입력값이 더 큰 함숫값을 준다. 즉 $f\left(\frac{9}{4}\right) > f(\sqrt{5})$이고, 이것이 보이려던 것이다.

소문항 (iii)

$a = x, b = x+2$로 두면 위의 변환에 의해

$$x^{x+2} > (x+2)^x \iff f(x) > f(x+2).$$

이다. $1 < x < 2$이면 $x \in (1,2)$이고 $x+2 \in (3,4)$이므로 두 수는 e의 서로 반대쪽에 있다. 따라서 징검다리가 필요하다.

> **생각해 보기** e의 왼쪽에 있는 점에서의 f 값과 오른쪽에 있는 점에서의 f 값을 어떻게 비교할 수 있을까?

두 호박색 점을 지나는 수평선을 이용한다. $1 < x < 2 < \mathrm{e}$이고 그 구간에서 f는 증가하므로 $f(x) < f(2)$이다. $\mathrm{e} < x+2 < 4$이고 그 구간에서 f는 감소하므로 $f(x+2) > f(4)$이다. 그리고 $f(2) = f(4)$이므로

$$f(x) < f(2) = f(4) < f(x+2).$$

이다. 따라서 $f(x) < f(x+2)$이고, 그러므로 $(x+2)^x$가 더 크다. 즉 $(1,2)$의 모든 x에 대하여 $(x+2)^x > x^{x+2}$이다.

소문항 (iv)

첫 번째 부등식의 양변을 3과 $2\sqrt{2}$의 거듭제곱으로 다시 쓴다.

$$9^{\sqrt{2}} = \left(3^2\right)^{\sqrt{2}} = 3^{2\sqrt{2}}, \qquad \sqrt{2}^{\,9} = \left(\sqrt{2}^{\,3}\right)^3 = \left(2\sqrt{2}\right)^3.$$

따라서 두 부등식은 좌변끼리 같고 우변끼리 같다. 즉 두 부등식은 같은 명제이므로 동치이다.

위의 변환에 의해 $3^{2\sqrt{2}} > (2\sqrt{2})^3 \iff f(3) > f(2\sqrt{2})$이다. 이제 $\mathrm{e}^2 < 8$에서 (양의 제곱근을 취하면) $\mathrm{e} < \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$이고, $8 < 9$이므로 $2\sqrt{2} < 3$이다. 따라서

$$\mathrm{e} < 2\sqrt{2} < 3,$$

이고, f가 $[\mathrm{e}, \infty)$에서 순감소하므로 $f(2\sqrt{2}) > f(3)$이다. 그러므로 $(2\sqrt{2})^3 > 3^{2\sqrt{2}}$, 즉

$$\sqrt{2}^{\,9} > 9^{\sqrt{2}} : \quad \text{더 큰 쪽은} \sqrt{2}^{\,9}.$$

소문항 (v)

$a = \sqrt[3]{3}$으로 두자. 8^a와 a^8을 비교하려 하므로, $f(8)$과 $f(a)$를 비교하면 된다. $a < 2 < \mathrm{e} < 8$이므로 두 입력값은 이번에도 최고점의 서로 반대쪽에 있고, 게다가 두 값은 꽤 가깝다($f(a) \approx 0.254$, $f(8) \approx 0.260$). 따라서 소문항 (iii)의 기법보다 더 정밀한 방법이 필요하다.

> **생각해 보기** $f(a)$와 $f(8)$을 더 간단한 점에서의 f 값으로 나타낼 수 있을까?

유용한 항등식은 $f(x^k) = \dfrac{k \ln x}{x^k}$이다. 이로부터

$$f(a) = \frac{\frac{1}{3}\ln 3}{a} = \frac{f(3)}{a}, \qquad f(8) = \frac{3\ln 2}{8} = \frac{3}{4}f(2), \qquad f(2\sqrt{2}) = \frac{\frac{3}{2}\ln 2}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}f(2).$$

를 얻는다. 소문항 (iv)에서 $f(3) < f(2\sqrt{2})$이다. $a > 0$으로 나누면

$$f(a) = \frac{f(3)}{a} < \frac{f(2\sqrt{2})}{a} = \frac{3f(2)}{2\sqrt{2}\,a}.$$

이다. 마지막으로, 양변을 여섯제곱하면 $9 > 8$이 되므로 $a = 3^{1/3} > 2^{1/2} = \sqrt{2}$이다. 따라서 $2\sqrt{2}\,a > 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 4$이고, $f(2) > 0$이므로

$$f(a) < \frac{3f(2)}{2\sqrt{2}\,a} < \frac{3f(2)}{4} = f(8).$$

이다. 그러므로 $f(8) > f(a)$이고, 위의 변환에 의해 이는 $8^a > a^8$을 뜻한다. 즉 더 큰 쪽은 $8^{\sqrt[3]{3}}$이다.

검산

수치로 확인하면 $3^\pi \approx 31.54$ 대 $\pi^3 \approx 31.01$, $\left(\frac{9}{4}\right)^{\sqrt{5}} \approx 6.131$ 대 $\sqrt{5}^{9/4} \approx 6.114$, $x = 1.5$일 때 $1.5^{3.5} \approx 4.13$ 대 $3.5^{1.5} \approx 6.55$, $9^{\sqrt{2}} \approx 22.36$ 대 $\sqrt{2}^9 \approx 22.63$, 그리고 $8^{\sqrt[3]{3}} \approx 20.07$ 대 $\sqrt[3]{3}^8 \approx 18.72$이다. 모두 위의 결론과 일치한다. (ii)와 (iv)에서는 차이가 작은데, 바로 그 때문에 대략적인 어림이 아니라 그래프를 이용한 논증이 필요하다. 소문항 (iii)을 $(1, 2)$의 무작위 점 10^5개에서 컴퓨터로 확인한 결과 예외는 없었다.

흔한 실수

- e의 서로 반대쪽에 있는 두 점에서의 f 값을 마치 f가 단조(monotonic)인 것처럼 비교하는 것. (iii)과 (v)에서는 징검다리가 반드시 필요하다.
- $b\ln a > a\ln b$를 ab로 나누어도 부등호 방향이 유지되는 것은 오직 $ab > 0$이기 때문이라는 점을 잊는 것.
- (ii)(b)에서 $\frac{9}{4}$와 $\sqrt{5}$ 중 어느 쪽이 더 큰지, 또는 둘 다 e보다 작다는 것을 정당화하지 않는 것.

STEP 너머

$a \neq b$인 방정식 $a^b = b^a$는 정확히 $f(a) = f(b)$이며, $0 < c < 1/\mathrm{e}$인 모든 수평선 $y = c$는 그래프와 두 번 만난다. $a < b$인 해는 $t > 0$에 대하여 $a = (1 + \frac{1}{t})^t$, $b = (1 + \frac{1}{t})^{t+1}$로 매

개변수화(parametrise)할 수 있다. $t = 1$로 두면 $(2, 4)$를 얻는데, 이는 이러한 성질을 갖는 유일한 양의 정수 쌍이다. $t \to \infty$일 때 두 값은 모두 e로 수렴(converge)하며, 이는 대학 1학년 해석학(analysis)의 대표적인 극한 중 하나이다. 이와 같은 논증의 바탕에 있는 단조성과 평균값 정리(mean value theorem)를 엄밀하게 다룬 내용은 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.