풀이

STEP II 2025, 문제 2

순수수학 • 절댓값을 포함한 복소수 방정식

> **STEP II 2025, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

핵심 아이디어

$z = x + \mathrm{i}y$로 놓고 방정식을 실수부(real part)와 허수부(imaginary part)로 나눈다. 절댓값(modulus)은 언제나 실수이므로 허수부에는 아무것도 기여하지 않고, 그러면 z^2(또는 z^3)의 허수부가 인수분해(factorise)된다. 이 인수분해를 보면 근이 아르강 도표(Argand diagram)의 어느 직선 위에 있어야 하는지 알 수 있고, 각 직선 위에서 문제는 변수가 하나인 실수 방정식으로 줄어든다.

풀이

소문항 (i)

(a) x, y가 실수일 때 $z = x + \mathrm{i}y$라 하자. 그러면 $z^2 = x^2 - y^2 + 2xy\,\mathrm{i}$이고, $|z + b|$는 실수이며 a도 실수이다. $z^2 + |z + b| = a$의 허수부를 비교하면

$$2xy = 0,$$

이므로 $x = 0$(z는 순허수(purely imaginary))이거나 $y = 0$(z는 순실수)이다. 이것이 보여야 할 내용이었다.

(b) y가 실수일 때 $z = \mathrm{i}y$라 하자. 그러면 $z^2 = -y^2$이고 $|z + \frac{5}{2}| = \sqrt{y^2 + \frac{25}{4}}$이므로

$$\sqrt{y^2 + \tfrac{25}{4}} = y^2 + \tfrac{7}{2}.$$

이어야 한다. 양변이 모두 양수이므로 이 식은 양변을 제곱한 방정식

$$y^2 + \tfrac{25}{4} = y^4 + 7y^2 + \tfrac{49}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad y^4 + 6y^2 + 6 = 0.$$

과 동치(equivalent)이다. 좌변은 모든 실수 y에 대해 6 이상이므로 해가 없다. 즉 이 방정식은 순허수인 근을 갖지 않는다.

(c) $z = x$가 실수라 하면 $x^2 + |x + \frac{7}{2}| = \frac{5}{2}$이어야 한다. $x + \frac{7}{2}$의 부호에 따라 경우를 나눈다.

- $x \geq -\frac{7}{2}$이면 $x^2 + x + \frac{7}{2} = \frac{5}{2}$, 즉 $x^2 + x + 1 = 0$이고, 판별식(discriminant)은 $1 - 4 = -3 < 0$이다. 실수해가 없다.
- $x < -\frac{7}{2}$이면 $x^2 - x - \frac{7}{2} = \frac{5}{2}$, 즉 $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) = 0$이다. 근 3과 -2는 모두 조건 $x < -\frac{7}{2}$를 만족하지 않으므로 어느 것도 해가 아니다.

따라서 순실수인 근은 없다.

? **생각해 보기** $x^2 - x - 6 = 0$을 풀고 거기서 멈추면 왜 충분하지 않은가?

각 경우의 식은 자신에게 해당하는 x의 범위에서만 원래 방정식을 나타낸다. 경우별 방정식의 근이 그 범위 밖에 있으면 그것은 다른 방정식(절댓값 안의 부호가 잘못된 방정식)의 해이므로 버려야 한다.

(d) 이제 $\frac{1}{2} < b < \frac{3}{4}$이다. 특히 $b > 0$이다.

허수근. $z = \mathrm{i}y$로 놓고 $Y = y^2 \geq 0$이라 쓰자. 방정식은 $-Y + \sqrt{Y + b^2} = \frac{1}{2}$, 즉

$$\sqrt{Y + b^2} = Y + \tfrac{1}{2}.$$

가 된다. $Y \geq 0$이면 우변이 양수이므로 제곱해도 동치인 방정식을 얻는다.

$$Y + b^2 = Y^2 + Y + \tfrac{1}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad Y^2 = b^2 - \tfrac{1}{4}.$$

$b > \frac{1}{2}$이므로 $b^2 - \frac{1}{4} > 0$이고, 따라서 $Y = \sqrt{b^2 - \frac{1}{4}}$는 실제로 양수인 값이며

$$z = \pm \mathrm{i} \left(b^2 - \tfrac{1}{4}\right)^{1/4}$$

는 순허수인 근이다.

실근. $z = x$로 놓고 $|x + b| = x + b$가 되는 범위 $x \geq -b$에서 근을 찾자. 방정식은

$$x^2 + x + b - \tfrac{1}{2} = 0,$$

가 되고, 판별식은 $1 - 4(b - \frac{1}{2}) = 3 - 4b$인데 $b < \frac{3}{4}$이므로 양수이다. 큰 근

$$x_+ = \frac{-1 + \sqrt{3 - 4b}}{2}.$$

을 택한다. 이 근이 범위 $x \geq -b$ 안에 있는지 확인해야 한다. 그런데 $x_+ \geq -b$는 $\sqrt{3-4b} \geq 1-2b$와 동치이고, $b > \frac{1}{2}$이면 우변은 음수이고 좌변은 양수이므로 이 부등식은 확실히 성립한다. 따라서 x_+는 순실수인 근이다.

그러므로 $\frac{1}{2} < b < \frac{3}{4}$일 때 이 방정식은 순허수인 근을 적어도 하나, 순실수인 근을 적어도 하나 가지며, 이것이 증명할 내용이었다. (b에 대한 각 조건은 꼭 한 번씩 쓰였다. $b > \frac{1}{2}$는 허수근과 $x_+ \geq -b$에, $b < \frac{3}{4}$는 실근의 판별식에 쓰였다.)

소문항 (ii)

$z = x + \mathrm{i}y$라 하자. 그러면

$$z^3 = x^3 - 3xy^2 + \left(3x^2y - y^3\right)\mathrm{i}, \qquad |z+2|^2 = (x+2)^2 + y^2.$$

이다. 두 번째 식은 실수이므로 방정식의 허수부는

$$y\left(3x^2 - y^2\right) = 0,$$

이고, 따라서 $y = 0$ 또는 $y^2 = 3x^2$이다. (기하적으로 보면 z는 실수축 위에 있거나 직선 $y = \pm\sqrt{3}\,x$ 중 하나 위에 있다. 이는 정확히 편각이 $\frac{\pi}{3}$의 배수인 방향들로, z^3을 실수로 만드는 방향이다.)

$y = 0$인 경우. 실수부에서 $x^3 + (x+2)^2 = 4$, 즉

$$x^3 + x^2 + 4x = x\left(x^2 + x + 4\right) = 0.$$

을 얻는다. 이차식의 판별식은 $1 - 16 < 0$이므로 유일한 해는 $x = 0$이고, $z = 0$이다.

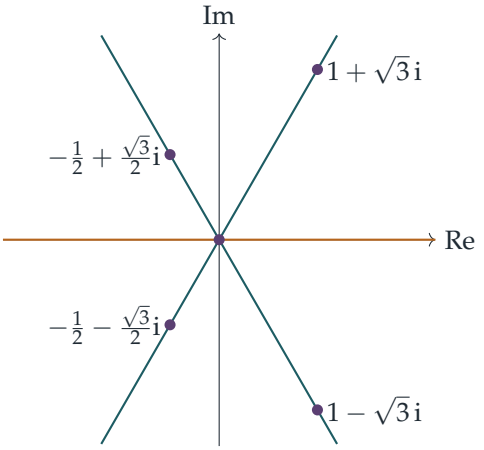
$y^2 = 3x^2$인 경우. 실수부 $x^3 - 3xy^2 + (x+2)^2 + y^2 = 4$에 $y^2 = 3x^2$을 대입하면

$$\begin{aligned} x^3 - 9x^3 + x^2 + 4x + 4 + 3x^2 &= 4 \\ -8x^3 + 4x^2 + 4x &= 0 \\ -4x\left(2x^2 - x - 1\right) &= 0 \\ -4x(2x+1)(x-1) &= 0. \end{aligned}$$

- $x = 0$이면 $y = 0$이어야 하므로 다시 $z = 0$이다.
- $x = 1$이면 $y^2 = 3$이므로 $z = 1 \pm \sqrt{3}\,\mathrm{i}$이다.
- $x = -\frac{1}{2}$이면 $y^2 = \frac{3}{4}$이므로 $z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}$이다.

모든 단계가 동치 변형이었으므로(대입과 인수분해만 했다) 이것들은 모두 실제로 해이다. 따라서 이 방정식의 근은 정확히 다섯 개이다.

$$z = 0, \qquad z = 1 \pm \sqrt{3}\,\mathrm{i}, \qquad z = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}.$$



근들은 허수부가 허용하는 세 직선 $y=0$과 $y=\pm\sqrt{3}\,x$ 위에 놓여 있다.

검산

- 극형식(polar form)으로 $1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$이므로 $z^3=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-8$이고, $|3+\sqrt{3}\,\mathrm{i}|^2=9+3=12$이다. 실제로 $-8+12=4$이다.
- $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$은 1의 세제곱근(cube root of unity)이므로 $z^3=1$이고, $|\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}|^2=\frac{9}{4}+\frac{3}{4}=3$이다. 실제로 $1+3=4$이다.
- (d)에서 $b=\frac{5}{8}$로 해 보자. 그러면 $Y=\sqrt{\frac{25}{64}-\frac{16}{64}}=\frac{3}{8}$이고, $-\frac{3}{8}+\sqrt{\frac{3}{8}+\frac{25}{64}}=-\frac{3}{8}+\frac{7}{8}=\frac{1}{2}$이다. 실근은 $x_+=\frac{-1+\sqrt{1/2}}{2}\approx-0.146$이고, 필요한 대로 $-\frac{5}{8}$보다 크다.
- 소문항 (ii)의 방정식의 근을 영역 $|x|,|y|\le 3$ 전체에서 컴퓨터로 탐색하면 위의 다섯 근이 정확히 나온다.

흔한 실수

- $|z+b|$에 허수부가 있는 것처럼 다루거나, $|z+2|^2$을 $(z+2)^2$으로 전개하는 것. 절댓값의 제곱은 $(x+2)^2+y^2$으로, 실수이다.
- (c)와 (d)에서처럼, 경우별 방정식의 근이 그 경우가 적용되는 범위 안에 있는지 확인하는 것을 잊는 것.
- (ii)에서 허수부를 y로 나누어 실근 $z=0$을 잃어버리는 것.

STEP 너머

z와 $|z|$(또는 $\bar{z}$)가 섞인 방정식은 z에 대한 다항식이 아니므로, 대수학의 기본정리(fundamental theorem of algebra)는 그 근의 개수에 대해 아무것도 말해 주지 않는다. 여기서는 "삼차방정식"이 근을 다섯 개 갖는다. 이런 방정식은 두 실수 미지수에 대한 두 실수 방정식의 쌍으로 보는 것이 올바른 관점이며, 이 관점은 대학 1학년 복소해석학(complex analysis)에서 다시 만나게 된다. 그곳에서는 함수가 $\bar{z}$가 아니라 z에만 의존할 때에만 복소수의 의미로 미분가능(differentiable)하다는 사실을 배운다(코시(Cauchy)–리만(Riemann) 방정식). Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이 기하적 그림을 생생하게 보여 준다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.