풀이

STEP II 2025, 문제 10

역학 • 강체 막대의 정역학

STEP II 2025, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

핵심 아이디어

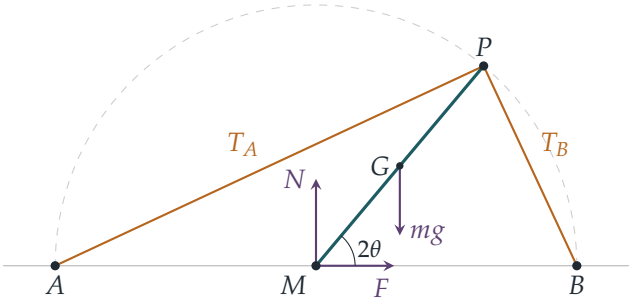
$MA = MB = MP = a$이므로 점 P는 AB를 지름으로 하는 원 위에 있고, 이 관찰 하나가 모든 것을 이끈다. 이로부터 P에서의 직각, θ로 나타낸 줄의 길이, 각 줄이 막대와 이루는 각이 모두 나온다. 훅의 법칙(Hooke's law)에 따르면 장력(tension)은 λ(길이 $-\ \ell$)$/\ell$이고, 이는 자연스럽게 "$\lambda \times$ 길이$/\ell$" 부분과 상수 "$-\lambda$" 부분으로 나뉜다. 이 분해가 바로 (i)에서 요구하는 분해이다. 그 뒤에는 잘 고른 점에 대한 모멘트(moment)를 취하여 원하지 않는 힘들을 없앤다.

풀이

막대를 무게 mg가 중점 G에 작용하는 균일한 강체 막대(uniform rigid rod)로, 줄을 훅의 법칙을 따르는 가벼운 탄성줄(light elastic string)로 모형화한다. M을 원점에 두고 $B = (a, 0)$, $A = (-a, 0)$이라 하면

$$P = (a\cos 2\theta,\ a\sin 2\theta).$$

이다.



(그림에서 마찰력 F의 방향이 옳다는 것은 (iii)에서 확인한다.)

소문항 (i)

$MA = MB = MP = a$이므로 점 P는 중심이 M이고 AB를 지름으로 하는 원 위에 있다. 반원에 대한 원주각 정리에 의해 $\angle APB = 90°$이다.

줄의 길이. 삼각형 MPA는 $MP = MA$인 이등변삼각형(isosceles triangle)이고 꼭지각이 $\angle PMA = 180° - 2\theta$이므로, 밑각은 $\angle MPA = \angle MAP = \theta$이다. 마찬가지로 삼각형 MPB의 꼭지각은 2θ이므로 $\angle MPB = 90° - \theta$이다. 빗변(hypotenuse)이 $AB = 2a$이고 $\angle PAB = \theta$인 직각삼각형 APB에서

$$PA = 2a\cos\theta, \qquad PB = 2a\sin\theta.$$

이다. $\theta < 45°$이므로 $PB < PA$이다. 두 줄 모두 팽팽하게 당겨져 있으므로 $2a\sin\theta > \ell$이다.

힘의 분해. P에서 A와 B를 향하는 단위벡터(unit vector)를 각각 $\mathbf{u}_A$, $\mathbf{u}_B$라 하자. 훅의 법칙에 의해 줄 PA의 장력은 $\lambda(PA - \ell)/\ell$이므로, 이 줄이 P에서 막대에 작용하는 힘은

$$\frac{\lambda(PA-\ell)}{\ell}\,\mathbf{u}_A = \frac{\lambda}{\ell}\,PA\,\mathbf{u}_A - \lambda\mathbf{u}_A = \frac{\lambda}{\ell}\,\overrightarrow{PA} - \lambda\mathbf{u}_A,$$

이고, PB에 대해서도 마찬가지이다. 두 힘을 더하면

$$\text{줄의 합력} = \frac{\lambda}{\ell}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}\right) - \lambda(\mathbf{u}_A + \mathbf{u}_B).$$

이다. 그런데 M이 AB의 중점이므로 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PM}$이고, $|\overrightarrow{PM}| = a$이다. 따라서 첫째 항은 막대 방향($M$ 쪽)으로 작용하는 크기 $2a\lambda/\ell$의 힘이다.

둘째 항에서 $\mathbf{u}_A$와 $\mathbf{u}_B$는 서로 수직인 단위벡터이므로(P에서의 각이 직각이다) $\mathbf{u}_A + \mathbf{u}_B$는 단위정사각형의 대각선이다. 즉 길이가 $\sqrt{2}$이고 $\angle APB$의 이등분선(bisector) 방향을 향한다. 따라서 $-\lambda(\mathbf{u}_A + \mathbf{u}_B)$는 $\angle APB$의 이등분선 방향(AB에서 멀어지는 쪽)으로 작용하는 크기 $\sqrt{2}\,\lambda$의 힘이다. 이것이 요구된 분해이다.

소문항 (ii)

M에 대한 모멘트를 취한다. 그러면 M에서 작용하는 마찰력(friction)과 수직항력(normal reaction)은 모멘트가 없다. 반시계 방향을 양의 방향으로 잡는다(B는 오른쪽에 있다).

> **생각해 보기** M은 각 줄을 품은 직선으로부터 얼마나 떨어져 있는가?

직선 PA는 PM과 각 $\angle MPA = \theta$를 이루고 $PM = a$이므로, M에서 직선 PA까지의 수직 거리는 $a\sin\theta$이다. 마찬가지로 M에서 직선 PB까지의 거리는 $a\sin(90° - \theta) = a\cos\theta$이다. 무게는 M의 오른쪽으로 수평 거리 $\frac{1}{2}a\cos 2\theta$인 곳에 작용한다.

줄 PA는 P를 A 쪽으로 당기고(M에 대해 반시계 방향), PB와 무게는 막대를 시계 방향으로 돌린다. 장력을 T_A, T_B라 쓰면

$$T_A\, a\sin\theta \;=\; T_B\, a\cos\theta + mg\cdot \tfrac{1}{2}a\cos 2\theta.$$

이다. $T_A = \lambda(2a\cos\theta - \ell)/\ell$, $T_B = \lambda(2a\sin\theta - \ell)/\ell$이므로

$$\begin{aligned} T_A\sin\theta - T_B\cos\theta &= \frac{\lambda}{\ell}\big(2a\cos\theta\sin\theta - \ell\sin\theta - 2a\sin\theta\cos\theta + \ell\cos\theta\big) \\ &= \lambda(\cos\theta - \sin\theta). \end{aligned}$$

이다. (막대 방향의 힘은 M에 대한 모멘트가 없으므로, 이것은 바로 크기 $\sqrt{2}\lambda$인 이등분선 방향 힘의 모멘트이다.) 따라서 모멘트 방정식은

$$\lambda(\cos\theta - \sin\theta) = \tfrac{1}{2}mg(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \tfrac{1}{2}mg(\cos\theta - \sin\theta)(\cos\theta + \sin\theta).$$

이 된다. $0 < \theta < 45°$이므로 $\cos\theta - \sin\theta > 0$이고, 따라서 이것으로 나눌 수 있다.

$$\cos\theta + \sin\theta = \frac{2\lambda}{mg}.$$

λ의 범위. $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\sin(\theta + 45°)$로 쓴다. 막대는 지면에 대해 기울어져 있으므로 $0 < \theta < 45°$이고, 따라서 $45° < \theta + 45° < 90°$이다. 이 구간에서 sin은 $\frac{1}{\sqrt{2}}$에서 1까지 순증가한다. 그러므로

$$1 < \cos\theta + \sin\theta < \sqrt{2} \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{1}{2}mg < \lambda < \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,mg,$$

이고, 이것이 이러한 평형(equilibrium)이 존재하기 위한 필요조건이다.

소문항 (iii)

? **생각해 보기** 어느 점을 택하면 모멘트 방정식에서 두 줄의 힘이 모두 사라지는가?

두 줄은 모두 P에서 작용하므로 P에 대한 모멘트를 취한다. 그러면 무게와 M에서 지면이 작용하는 두 힘만 나타난다. P를 기준으로 할 때 점 M은 수평 거리 $a\cos 2\theta$(왼쪽), 수직 거리 $a\sin 2\theta$(아래쪽)에 있고, G는 그 거리의 절반인 곳에 있다.

마찰력 F가 B 쪽으로 작용한다고 가정하자(아래에서 이를 확인한다). P에 대하여

- N(M에서 위쪽, P의 왼쪽)의 시계 방향 모멘트는 $N\,a\cos 2\theta$이다.
- F(M에서 B 쪽, P의 아래쪽)의 반시계 방향 모멘트는 $F\,a\sin 2\theta$이다.
- mg(G에서 아래쪽, P의 왼쪽)의 반시계 방향 모멘트는 $mg\cdot\frac{1}{2}a\cos 2\theta$이다.

평형이 되려면

$$Na\cos 2\theta = Fa\sin 2\theta + \tfrac{1}{2}mg\,a\cos 2\theta.$$

이어야 한다. $2\theta < 90^\circ$이므로 $\cos 2\theta > 0$이고, $a\cos 2\theta$로 나누면

$$N - F\tan 2\theta = \tfrac{1}{2}mg,$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

마찰력의 방향. 수평 방향으로 분해하면 F는 줄의 합력의 수평 성분과 평형을 이룬다. (i)로부터 $\mathbf{u}_A = (-\cos\theta, -\sin\theta)$, $\mathbf{u}_B = (\sin\theta, -\cos\theta)$이고 $\overrightarrow{PM} = (-a\cos 2\theta, -a\sin 2\theta)$이므로, 줄의 합력의 수평 성분은 $-\frac{2a\lambda}{\ell}\cos 2\theta + \lambda(\cos\theta - \sin\theta)$이다. 따라서 B 쪽으로 작용하는 마찰력은

$$F = \frac{2a\lambda}{\ell}\cos 2\theta - \lambda(\cos\theta - \sin\theta) = \lambda(\cos\theta - \sin\theta)\left(\frac{2a(\cos\theta + \sin\theta)}{\ell} - 1\right),$$

이고, $2a\sin\theta > \ell$(두 줄 모두 팽팽함)이므로 이 값은 양수이다. 따라서 마찰력은 실제로 B 쪽으로 작용하며, F는 그 크기이다.

검산

- (ii)의 극한은 타당하다. $\theta \to 0$이면 막대는 거의 평평하게 놓이고 $\lambda \to \frac{1}{2}mg$이다. $\theta \to 45^\circ$이면 막대는 수직이 되고 $\lambda \to mg/\sqrt{2}$이다.
- 수치로 확인하면, $a = 1$, $mg = 10$, $\theta = 20^\circ$, $\ell = 0.5$일 때 $\lambda = 5(\cos 20^\circ + \sin 20^\circ) \approx 6.408$이고, 장력은 $T_A \approx 17.68$, $T_B \approx 2.36$이며, 힘을 분해하면 $N \approx 18.26$, $F \approx 15.81$이므로 $N - F\tan 40^\circ \approx 5.00 = \frac{1}{2}mg$이다. M에 대한 모멘트도 평형을 이룬다. 수천 개의 무작위 배치에 대한 컴퓨터 검산으로 모든 결과가 반올림 오차 범위 안에서 확인되었다.

흔한 실수

- 장력을 $\lambda \times$ 늘어난 길이/ℓ이 아니라 $\lambda \times$ 늘어난 길이로 잡는 것.
- $\theta < 45^\circ$이므로 $\cos\theta - \sin\theta$나 $\cos 2\theta$가 양수라는 점을 언급하지 않고 이것으로 나누는 것.
- (iii)에서 M에 대한 모멘트를 취하는 것. 그러면 바로 우리가 구하려는 힘인 N과 F가 사라진다. P에 대한 모멘트를 취하면 대신 줄의 힘이 사라진다.

STEP 너머

(i)의 분해는 일반적인 사실의 깔끔한 예이다. 강체(rigid body)에 작용하는 힘들의 모임은 하나의 힘과 하나의 우력(couple)을 더한 것과 동등하며, 모멘트 계산이 가장 쉬워지도록 힘을 마음대로 묶어도 된다. 여기서 "줄마다 $-\lambda$"인 부분은 장력이 일정한 한 쌍의 줄처럼 행동하며, 그 합력은 기하만으로 정해진다. 강체의 정역학, 가상일(virtual work), 평형의 안정성은 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에서 자세히 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.