풀이

STEP II 2025, 문제 1

순수수학 • 구간별로 정의된 함수

> **STEP II 2025, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

핵심 아이디어

Min으로 만든 함수는 구간마다 다른 식으로 주어지는 평범한 함수일 뿐이다. 그러므로 언제나 첫 번째 할 일은 두 인수가 교차하는 곳을 찾아 함수를 구간별로 정의된(piecewise) 형태로 쓰고, 구간마다 따로 풀되 그 식이 나온 구간 안에 들어가는 답만 남기는 것이다. 이음매에서 함수는 연속(continuous)이지만 보통 꺾인 점(corner)이 생기며, 바로 이 꺾인 점 때문에 (iv)의 점은 도함수(derivative)가 0이 아닌데도 극대가 된다.

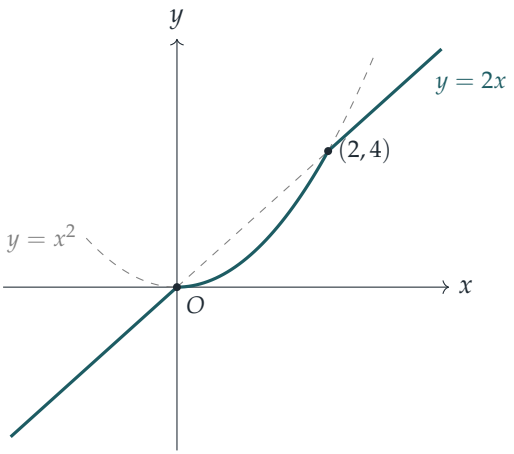
풀이

소문항 (i)

$x^2 \le 2x \iff x(x-2) \le 0 \iff 0 \le x \le 2$이다. 따라서

$$\operatorname{Min}(x^2, 2x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x \le 2, \\ 2x & x < 0 \text{ 또는 } x > 2. \end{cases}$$

그래프는 직선 $y = 2x$를 따라가다가 $x = 0$과 $x = 2$ 사이에서만 포물선(parabola)으로 내려가는데, 이 구간에서 포물선은 현(chord)보다 아래에 있기 때문이다. 두 직선 부분은 모두 **같은** 직선 위에 있다. 꺾인 점은 두 곳으로, 포물선의 기울기가 0이고 직선의 기울기가 2인 $(0,0)$, 그리고 기울기가 각각 4와 2인 $(2,4)$이다.



소문항 (ii)

(i)에서 구한 두 조각을 이용한다.

- $0 \le x \le 2$일 때: $2x^2 = 5x - 3 \iff 2x^2 - 5x + 3 = 0 \iff (2x-3)(x-1) = 0$이므로 $x = 1$ 또는 $x = \frac{3}{2}$이다. 둘 다 $[0,2]$에 속하므로 둘 다 해이다.
- $x < 0$ 또는 $x > 2$일 때: $4x = 5x - 3 \iff x = 3$이고, 이는 $x > 2$를 만족하므로 해이다.

해는 $x = 1, x = \frac{3}{2}, x = 3$이다.

소문항 (iii)

두 번째 함수도 필요하다. $x^3 \le 4x \iff x(x-2)(x+2) \le 0 \iff x \le -2$ 또는 $0 \le x \le 2$이다. 둘을 합치면

$$\mathrm{Min}(x^2, 2x) + \mathrm{Min}(x^3, 4x) = \begin{cases} x^3 + 2x & x \le -2, \\ 6x & -2 < x < 0, \\ x^3 + x^2 & 0 \le x \le 2, \\ 6x & x > 2. \end{cases}$$

$m = 2$인 경우.

- $x \le -2$: $x^3 + 2x = 2x$에서 $x = 0$이지만, 이는 구간에 속하지 않는다.
- $-2 < x < 0$과 $x > 2$: $6x = 2x$에서 $x = 0$이지만, 어느 구간에도 속하지 않는다.
- $0 \le x \le 2$: $x^3 + x^2 - 2x = x(x+2)(x-1) = 0$에서 $x = 0$ 또는 $x = 1$이다($x = -2$는

버린다).

따라서 $m = 2$일 때 해는 $x = 0$과 $x = 1$이다.

? 생각해 보기 방정식 $6x = 6x$는 어떻게 되는가?

이 식은 **모든** x에 대해 참이므로, $m = 6$일 때는 고립된 점들만이 아니라 구간 전체가 해가 된다.

$m = 6$인 경우.

- $x \le -2$: $x^3 + 2x = 6x \iff x(x-2)(x+2) = 0$이고, 구간에 속하는 것은 $x = -2$뿐이다.
- $-2 < x < 0$과 $x > 2$: $6x = 6x$는 항등적으로 성립하므로 이 구간의 모든 x가 해이다.
- $0 \le x \le 2$: $x^3 + x^2 - 6x = x(x+3)(x-2) = 0$에서 $x = 0$ 또는 $x = 2$이다($x = -3$은 버린다).

이를 종합하면 $m = 6$일 때 해집합은

$$-2 \le x \le 0 \quad \text{또는} \quad x \ge 2.$$

소문항 (iv)

여기서는 $x^3 \le x^2 \iff x^2(x-1) \le 0 \iff x \le 1$이다(인수 x^2은 결코 음이 아니며, $x = 0$이면 등호가 성립한다). 따라서

$$y = \begin{cases} 2x^3 - 5x & x \le 1, \\ 2x^2 - 5x & x > 1. \end{cases}$$

$x = 1$에서 두 식은 모두 $y = -3$을 주므로, 곡선은 그곳에서 연속이고 $(1, -3)$을 지난다.

점 $(1, -3)$. 이 점은 정류점(stationary point)이 아니다. $x = 1$에서 왼쪽 기울기는 $6x^2 - 5 = 1$이고 오른쪽 기울기는 $4x - 5 = -1$이다. 더 정확히 말하면

- $\sqrt{5/6} < x < 1$에서 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 6x^2 - 5 > 0$이므로 y는 -3까지 증가하고,
- $1 < x < \frac{5}{4}$에서 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 4x - 5 < 0$이므로 y는 -3에서부터 감소한다.

따라서 $x = 1$ 근처의 양쪽 모든 점에서 $y < -3$이고, $(1, -3)$은 곡선의 꺾인 점인 극대점(local maximum)이다.

나머지 극점. $x<1$에서 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 6x^2-5 = 0$이면 $x = \pm\sqrt{5/6} = \pm\frac{\sqrt{30}}{6}$이고, 둘 다 1보다 작다. $2x^2 = \frac{5}{3}$을 이용하면

$$y = x(2x^2-5) = -\tfrac{10}{3}x = \mp\tfrac{10}{3}\cdot\tfrac{\sqrt{30}}{6} = \mp\tfrac{5\sqrt{30}}{9}.$$

$\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 = 12x$이므로 $x<0$인 점은 극대, $x>0$인 점은 극소이다. $x>1$에서 $4x-5=0$이면 $x=\frac{5}{4}$이고 $y = \frac{25}{8}-\frac{25}{4} = -\frac{25}{8}$인데, 포물선이 위로 열려 있으므로 이는 극소이다. 따라서 나머지 세 극점(turning point)은

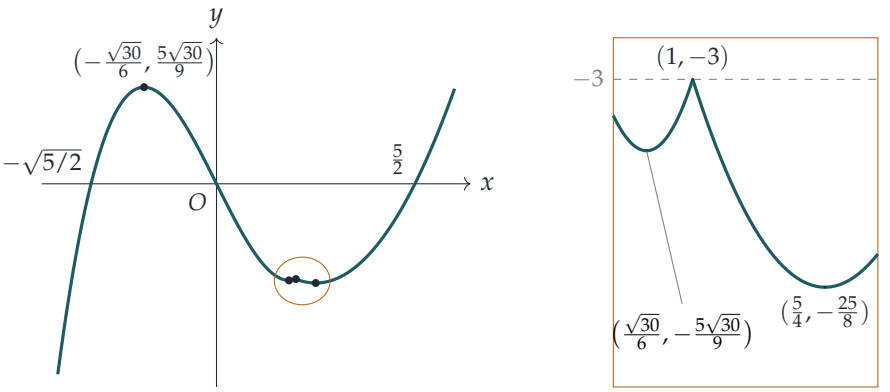
$$\text{극대}\left(-\tfrac{\sqrt{30}}{6},\ \tfrac{5\sqrt{30}}{9}\right), \qquad \text{극소}\left(\tfrac{\sqrt{30}}{6},\ -\tfrac{5\sqrt{30}}{9}\right)\text{와}\ \left(\tfrac{5}{4},\ -\tfrac{25}{8}\right).$$

개형. 삼차함수 $2x^3-5x$는 기함수(odd function)이므로, $-1\le x\le 1$인 곡선 부분은 원점에 대해 회전대칭이다. 곡선은 $x\le 1$에서 $x(2x^2-5)=0$인 곳, 즉 $x=0$과 $x=-\sqrt{5/2}\approx -1.58$에서, 그리고 $x>1$에서 $x(2x-5)=0$인 곳, 즉 $x=\frac{5}{2}$에서 축과 만난다. $x\to-\infty$이면 $y\to-\infty$이고, $x\to\infty$이면 $y\to\infty$이다.

$x=1$ 근처의 세 점은 서로 매우 가까우므로 그 순서를 정해 둘 필요가 있다. 양수 $\frac{5\sqrt{30}}{9}$와 $\frac{25}{8}$을 제곱하면 $\frac{750}{81}\approx 9.26$과 $\frac{625}{64}\approx 9.77$이므로

$$-\tfrac{25}{8} < -\tfrac{5\sqrt{30}}{9} < -3 :$$

$x=\frac{5}{4}$에서의 극소가 더 낮고, 두 극소 모두 꺾인 점보다 아래에 있다. 적당한 축척에서는 이 세부 사항이 보이지 않으므로, 확대한 작은 그림으로 보여 준다.



검산

- (ii): $x=\frac{3}{2}$에서 $\mathrm{Min}(\frac{9}{4},3)=\frac{9}{4}$이고 $2\cdot\frac{9}{4}=\frac{9}{2}=5\cdot\frac{3}{2}-3$이다. $x=3$에서 $\mathrm{Min}(9,6)=6$이고 $12=15-3$이다.
- (iii), $m=6$: $x=-1$을 넣으면 $\mathrm{Min}(1,-2)+\mathrm{Min}(-1,-4) = -2-4 = -6 = 6x$이다. 해집합에 속하지 않는 $x=1$을 넣으면 $1+1=2\neq 6$이다.

- (iv): $[-3,3]$에서 10^{-5} 간격으로 y를 컴퓨터로 조사한 결과 극점은 정확히 네 개로, $x \approx -0.9129$ ($y \approx 3.0429$), 0.9129 (-3.0429), 1 (-3), 1.25 (-3.125)에 있었으며, 위에서 구한 값과 일치한다.

흔한 실수

- 해당 식이 적용되는 구간 밖에 있는 근을 남겨 두는 것. 예를 들어 (iii)에서 $m = 2$일 때의 $x = -2$가 그렇다.
- $6x = 6x$를 하나의 값을 주는 식처럼 풀고, 구간 전체에서 성립한다는 것을 알아차리지 못하는 것.
- (iv)의 곡선을 $(1,-3)$에서 매끄럽게 그리는 것. 그곳에는 왼쪽 기울기 1, 오른쪽 기울기 -1인 진짜 꺾인 점이 있다.

STEP 너머

$\mathrm{Min}(f,g) = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$ 같은 함수는 f와 g가 연속이면 언제나 연속이지만, 미분가능(differentiable)할 필요는 없다. 그리고 (iv)는 극대점이 반드시 정류점일 필요는 없음을 보여 준다. 해석학(analysis) 강의에서는 이로부터 **미분가능한** 함수의 극값은 도함수가 0이 되는 곳에서 나타난다는 결과를 신중하게 서술하게 되고, 한쪽 도함수(one-sided derivative)를 다루게 된다. 이런 종류의 구간별로 정의된 함수는 최적화(optimisation)에서도 핵심적인데, 여러 일차함수의 최솟값이 선형계획법(linear programming)에서 연구하는 꼭짓점을 만들어 낸다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 바로 이런 예를 염두에 두고 연속성과 미분가능성을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.