풀이

STEP III 2024, 문제 9

역학 • 비스듬한 충돌

> **STEP III 2024, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

모든 일은 탁자 평면 위에서 일어나므로 위에서 내려다보자. 그러면 각 구는 가장 낮은 점을 중심으로 하는 반지름 r인 원이 된다. 매끄러운(smooth) 구에서는 충격량(impulse)이 중심선(line of centres)을 따라 작용하므로, 속도를 그 직선 방향 성분(운동량 보존과 반발 법칙이 적용되는 성분)과 그에 수직인 성분(변하지 않는 성분)으로 나눈다. 그 뒤 B는 직선 위를 움직이므로, B가 C와 충돌하는지는 점과 직선 사이의 거리에 관한 문제가 된다.

풀이

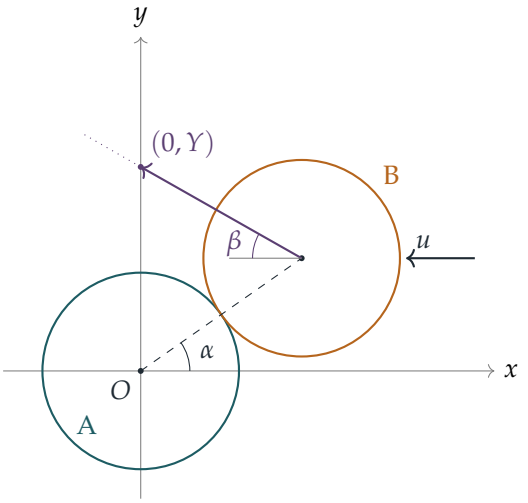
구들은 매끄럽고 질량이 같으며, 매끄러운 탁자 위에 놓여 있다고 모형화한다. 따라서 어디에도 마찰이 없고, 각 구는 충돌하는 순간을 제외하면 일정한 속력으로 직선 운동을 한다. 구의 가장 낮은 점을 가지고 계산하는데, 이 점은 수평 방향으로 중심과 똑같이 움직인다. 반지름 r인 두 구는 가장 낮은 점 사이의 거리가 $2r$일 때 접한다.

소문항 (i)

B의 가장 낮은 점은 직선 $y = 2r\sin\alpha$ 위를 움직인다. 이 점이 O로부터 거리 $2r$에 있을 때, 즉 점 $(2r\cos\alpha,\ 2r\sin\alpha)$에서 B는 A와 접한다(B가 x의 큰 양수 쪽에서 오므로 양의 x좌표를 택한다). 따라서 충돌 순간 A에서 B로 향하는 중심선의 단위벡터(unit vector)는

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \qquad \text{이고} \qquad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

는 이에 수직이다.



충돌 전 B의 속도는 $\begin{pmatrix} -u \\ 0 \end{pmatrix}$이고, **n** 방향 성분은 $-u\cos\alpha$, **t** 방향 성분은 $u\sin\alpha$이다. A는 정지해 있다.

구들이 매끄러우므로 두 구 사이의 충격량은 **n** 방향이다. 따라서 B의 **t** 방향 성분은 $u\sin\alpha$로 유지된다(그리고 A는 **t** 방향 성분을 얻지 않는다). 충돌 후 **n** 방향 성분을 각각 v_A와 v_B라 하자. **n** 방향의 운동량 보존(conservation of momentum)(질량이 같음)과 뉴턴의 반발 법칙(Newton's law of restitution)에 의해

$$\begin{aligned} v_A + v_B &= -u\cos\alpha, \\ v_B - v_A &= \tfrac{1}{3}(0 - (-u\cos\alpha)) = \tfrac{1}{3}u\cos\alpha. \end{aligned}$$

이다. (**n** 방향으로 접근하는 속력은 $u\cos\alpha$이고, **n**의 양의 방향 쪽에 있는 B가 A로부터 멀어진다.) 두 식을 더하면 $v_B = -\frac{1}{3}u\cos\alpha$이고, $v_A = -\frac{2}{3}u\cos\alpha$이다.

따라서 충돌 후 B의 속도는

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{3}u\cos\alpha \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} + u\sin\alpha \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}u(\cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha) \\ \frac{2}{3}u\sin\alpha\cos\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}u(1 + 2\sin^2\alpha) \\ \frac{2}{3}u\sin\alpha\cos\alpha \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$를 이용했다. 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (ii)

두 성분은 모두 0이 아니며, α가 예각(acute angle)이므로 x성분은 음수, y성분은 양수이다. 따라서 B는 이제 왼쪽 위로 움직이고, 그 경로의 기울기(gradient)의 크기는

$$\frac{\frac{2}{3}u\sin\alpha\cos\alpha}{\frac{1}{3}u(1+2\sin^2\alpha)} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1+2\sin^2\alpha} = \tan\beta,$$

이다. 여기서 β는 경로가 x축의 음의 방향과 이루는 예각이다. B의 가장 낮은 점은 $(2r\cos\alpha, 2r\sin\alpha)$에서 출발한다. y축에 도달하려면 x가 $2r\cos\alpha$만큼 줄어야 하고, 그동안 y는 $2r\cos\alpha\tan\beta$만큼 늘어난다. 따라서 B는 y축과 $(0, Y)$에서 만나며

$$Y = 2r\sin\alpha + 2r\cos\alpha\tan\beta = 2r(\cos\alpha\tan\beta + \sin\alpha),$$

이므로 원하는 결과가 나온다.

소문항 (iii)

충돌 후 B는 $(0, Y)$를 지나고 단위 방향벡터가 $\mathbf{d} = (-\cos\beta, \sin\beta)$인 직선 ℓ을 따라 일정한 속력으로 직선 운동을 한다. C는 무언가에 부딪힐 때까지 $(0, h)$에 정지해 있다. B가 C와 충돌하는 것은 정확히 $(0, h)$에서 B의 경로까지의 거리가 $2r$보다 작아질 때이다.

$(0, h)$에서 ℓ까지의 수직 거리(perpendicular distance)는 $(0, h) - (0, Y) = (0, h - Y)$의 $\mathbf{d}$에 수직인 성분의 크기이다. ℓ의 단위 법선벡터(unit normal)는 $(\sin\beta, \cos\beta)$이므로 이 거리는

$$|(0,\, h - Y)\cdot(\sin\beta, \cos\beta)| = |h - Y|\cos\beta,$$

이다. β가 예각이므로 $\cos\beta > 0$이기 때문이다. $h > Y + 2r\sec\beta$이면 $h - Y > 2r\sec\beta > 0$이고, 거리는 $(h - Y)\cos\beta > 2r$이다. 직선 전체에서 가장 가까운 점뿐 아니라 B의 경로 위의 모든 점이 C의 가장 낮은 점으로부터 적어도 이만큼 떨어져 있다. 따라서 B는 C에 $2r$ 이내로 다가가지 않으며 C와 충돌하지 않는다.

(다른 방해물도 없다. A는 속도 $-\frac{2}{3}u\cos\alpha\,\mathbf{n}$으로 $y < 0$ 영역으로 움직여 B와 C 모두에서 멀어진다.)

> **생각해 보기** 소문항 (iv)는 $Y < 2r\sec\beta$를 증명하라고 한다. 이를 하나의 삼각함수 사실로 바꿀 수 있을까?

그렇다. 양변에 $\cos\beta > 0$를 곱하면 좌변이 덧셈정리(compound-angle formula)의 형태가 된다.

소문항 (iv)

$2r$로 나누고 $\cos\beta > 0$를 곱하면, 부등식 $Y < 2r\sec\beta$는

$$\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta < 1, \qquad \text{즉,} \qquad \sin(\alpha+\beta) < 1.$$

과 동치이다. 물론 $\sin(\alpha+\beta) \le 1$이고, $0 < \alpha+\beta < \pi$이므로 등호는 $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$일 때만 성립한다. 그러면 $\tan\beta = \cot\alpha$, 즉

$$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1+2\sin^2\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \iff 2\sin^2\alpha = 1 + 2\sin^2\alpha$$

($\cos\alpha \neq 0$으로 나눔)이어야 하는데, 이는 불가능하다. 따라서 $\sin(\alpha+\beta) < 1$이고, $Y < 2r\sec\beta$이다.

따라서. 이제

$$Y + 2r\sec\beta < 4r\sec\beta,$$

이므로, 모든 예각 α에 대한 $\sec\beta$의 상계, 즉 $\tan\beta$의 상계가 필요하다. 분자와 분모를 $\cos^2\alpha$로 나누고 $t = \tan\alpha > 0$라 두면

$$\tan\beta = \frac{2\tan\alpha}{\sec^2\alpha + 2\tan^2\alpha} = \frac{2t}{1+3t^2} \le \frac{2t}{2\sqrt{3}\,t} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

이다. 이는 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality) $1 + 3t^2 \ge 2\sqrt{3}\,t$에 의한 것이다(등호는 $t = 1/\sqrt{3}$, 즉 $\alpha = \frac{\pi}{6}$일 때 성립한다). 따라서 $0 < \beta \le \frac{\pi}{6}$이고, $\sec\beta \le \sec\frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}}$이다. 그러므로 모든 예각 α에 대하여

$$Y + 2r\sec\beta < 4r\sec\beta \le \frac{8r}{\sqrt{3}}.$$

이다. $h > \dfrac{8r}{\sqrt{3}}$이면 $h > Y + 2r\sec\beta$이므로, 소문항 (iii)에 의해 α의 값과 관계없이 B는 C와 충돌하지 않는다.

검산

- 운동량: A의 속도 $-\frac{2}{3}u\cos\alpha\,(\cos\alpha, \sin\alpha)$와 소문항 (i)에서 구한 B의 속도를 더하면 $(-u, 0)$이 되어, 질량이 같을 때 당연히 그래야 하는 결과와 일치한다.
- $\alpha = 0$(정면 충돌)일 때 공식은 B의 속도로 $(-\frac{1}{3}u, 0)$을 주고, A는 $(-\frac{2}{3}u, 0)$을 얻는다. 이는 질량이 같고 $e = \frac{1}{3}$인 경우의 익숙한 일차원 답이다.
- $\alpha = \frac{\pi}{6}$이면 $\tan\beta = 1/\sqrt{3}$이므로 $\beta = \frac{\pi}{6}$, $\alpha+\beta = \frac{\pi}{3}$이고 $Y = 2r(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}) = 2r$로, $2r\sec\beta = 4r/\sqrt{3} \approx 2.31r$보다 충분히 작다. 이때 $Y + 2r\sec\beta \approx 4.31r$로, $8r/\sqrt{3} \approx 4.62r$보다 작다.

- 무작위로 고른 α 값 20,000개에 대하여, B의 직선 경로를 단계별로 따라가면 위의 교점 Y가 나오는 것, $h = Y + 2r\sec\beta$보다 조금 크면 B가 C를 비껴가고 조금 작으면 충돌하는 것, 그리고 $\sec\beta$의 최댓값이 $1.1547\ldots = 2/\sqrt{3}$인 것을 컴퓨터로 확인했다.

흔한 실수

- 중심선 방향 성분 대신 x성분에 반발 법칙을 적용하는 것. 매끄러운 구 사이의 충격량은 중심선을 따라 작용하며, 여기서 중심선은 x축과 각 α를 이룬다.
- 충돌 순간의 중심선을 x축이나 y축 방향으로 잡는 것. 접점은 두 구의 거리가 $2r$이라는 조건으로 정해진다.
- 소문항 (iii)에서 C의 가장 낮은 점이 경로 전체가 아니라 한 점 $(0, Y)$로부터 $2r$ 이내에 있는지를 확인하는 것.

STEP 너머

속도를 선택한 단위벡터 방향 성분과 그에 수직인 성분으로 나누는 것은 정규직교기저(orthonormal basis)로의 사영(projection)이며, 이 아이디어는 대학 1학년 선형대수학(linear algebra)과 역학(mechanics) 전반에 걸쳐 나온다. 매끄러운 구의 비스듬한 충돌(oblique collision)은 산란(scattering)의 첫 번째 모형으로, 물리학자들은 이를 이용해 기체와 입자 충돌을 연구한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 벡터 접근법으로 이차원 충돌을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.