풀이

STEP III 2024, 문제 8

순수수학 • 교차하는 이차곡선

> **STEP III 2024, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

$y^2 - x^2 + \ldots$ 꼴의 이차식(quadratic expression)이 기울기(gradient)가 ± 1인 두 직선으로 쪼개지는 것은, 완전제곱식 만들기(completing the square)를 했을 때 상수항이 남지 않을 때이고 그때뿐이다. 나머지 문항의 요령은, 한 곡선의 방정식에 다른 곡선의 방정식의 상수배를 더해도 공통점은 하나도 잃지 않는다는 것이다. 그리고 상수배를 잘 고르면 복잡한 사차(quartic) 문제가 "어떤 직선들이 포물선(parabola)과 만나는가"라는 문제로 바뀌는데, 이것은 이차방정식 두 개에 지나지 않는다.

풀이

소문항 (i)

곱이 0이 되는 것은 인수(factor) 중 하나가 0일 때이고 그때뿐이므로, $(y - x + 3)(y + x - 5) = 0$을 만족하는 점들은 $y = x - 3$(기울기 1) 위의 점들과 $y = -x + 5$(기울기 -1) 위의 점들을 합한 것이다.

일반적인 방정식에 대해서는 두 변수 모두에 대해 완전제곱식을 만든다.

$$y^2 - x^2 + py + qx + r = (y + \tfrac{1}{2}p)^2 - (x - \tfrac{1}{2}q)^2 - K, \qquad \text{여기서} K = \tfrac{1}{4}(p^2 - q^2) - r.$$

$Y = y + \frac{1}{2}p$, $X = x - \frac{1}{2}q$로 놓자. 이것은 평행이동(translation)이므로 기울기를 바꾸지 않는다. 방정식은 $(Y - X)(Y + X) = K$가 된다.

$p^2 - q^2 = 4r$이면 $K = 0$이고 방정식은 $(Y - X)(Y + X) = 0$이다. 첫 문단에 의해 이것은 두 직선 $Y = X$와 $Y = -X$이고, 기울기는 각각 1과 -1이다. 원래 좌표로 쓰면 이 직선들은

$$y - x + \tfrac{1}{2}(p + q) = 0 \quad \text{그리고} \quad y + x + \tfrac{1}{2}(p - q) = 0.$$

이다.

역으로, 방정식이 기울기가 ± 1인 두 직선을 나타낸다고 하자. $K = 0$임을 보이겠다. 두 직선 중 하나는 기울기가 1이므로 $Y = X + c$ 꼴이고, 그 위의 모든 점이 방정식을 만족한다. 이 직선 위에서 $(Y - X)(Y + X) = c(2X + c)$이므로, **모든** 실수 X에 대해 $2cX + c^2 = K$이다. X의 일차함수가 상수이려면 계수가 0이어야 하므로 $c = 0$이고, 따라서 $K = c^2 = 0$이다. 그러므로 $p^2 - q^2 = 4r$이고, "필요충분조건(if and only if)"이 증명되었다.

소문항 (ii)

어떤 점이 C_1 위에 있으면 그 점에서 $y^2 + 2sy + s(s+1) - x = 0$이고, C_2 위에 있으면 그 점에서 $y - x^2 = 0$이다. 따라서 공통점에서 식

$$y^2 + 2sy + s(s+1) - x + k(y - x^2)$$

의 값은 k의 값에 관계없이 $0 + k \cdot 0 = 0$이다.

$k = 1$로 놓으면 방정식은

$$y^2 - x^2 + (2s+1)y - x + s(s+1) = 0,$$

이 되고, 이것은 $p = 2s + 1, q = -1, r = s(s+1)$인 소문항 (i)의 꼴이다. 그러면

$$p^2 - q^2 = 4s^2 + 4s + 1 - 1 = 4s(s+1) = 4r,$$

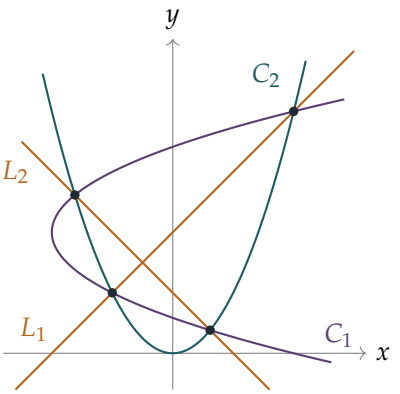
이므로, 소문항 (i)에 의해 이것은 기울기가 1과 -1인 두 직선이다. $\frac{1}{2}(p+q) = s$, $\frac{1}{2}(p-q) = s+1$을 써서 소문항 (i)의 인수분해를 이용하면 방정식은

$$(y - x + s)(y + x + s + 1) = 0,$$

이므로 두 직선은

$$L_1 : \ y = x - s \qquad \text{그리고} \qquad L_2 : \ y = -x - s - 1.$$

이다. 첫 문단에 의해 $C_1 \cap C_2$의 모든 점은 이 방정식을 만족하므로, 네 교점은 모두 $L_1 \cup L_2$ 위에 있다. (이것은 모든 s에 대해 성립한다. 네 점이 존재한다는 사실은 전혀 필요하지 않았다.)



그림은 $s = -2$인 경우이다. C_1은 $x = (y-2)^2 - 2$이고, C_1과 C_2의 네 공통점은 직선 $y = x+2$와 $y = 1-x$ 위에 두 개씩 놓여 있다.

소문항 (iii)

C_1과 C_2의 모든 공통점은 C_2 위에 있고, L_1 또는 L_2 위에 있다. $y = x^2$을 대입하면

$$\text{직선} L_1 : \quad x^2 - x + s = 0,$$
$$\text{직선} L_2 : \quad x^2 + x + s + 1 = 0.$$

이다. C_2 위의 점은 x좌표로 결정되므로, 각 직선은 C_2와 많아야 두 점에서 만난다. 따라서 서로 다른 공통점이 네 개이려면 각 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 하고, 두 판별식(discriminant)이 모두 양수이어야 한다.

$$1 - 4s > 0 \quad \text{그리고} \quad 1 - 4(s+1) > 0.$$

두 번째 부등식에서 요구한 대로 $s < -\frac{3}{4}$를 얻는다. (그러면 첫 번째 부등식 $s < \frac{1}{4}$는 저절로 성립한다.)

> **생각해 보기** 소문항 (iv)에서 C_2와 $L_1 \cup L_2$ 위에 있는 네 점을 찾는 것만으로는 왜 충분하지 않을까?

소문항 (ii)는 C_1과 C_2의 공통점이 두 직선 위에 있다는 것만 보였다. 역방향도 필요하고, 네 점이 서로 겹치지 않는다는 것도 확인해야 한다.

소문항 (iv)

$s < -\frac{3}{4}$라고 하자. 그러면 위의 두 판별식이 모두 양수이므로($-3 - 4s > 0$, 그리고 $1 - 4s > 4 > 0$), L_1은 C_2와 서로 다른 두 점에서 만나고 L_2도 마찬가지이다.

이 네 점은 서로 다르다. 두 번 세어진 점이 있다면 그 점은 L_1과 L_2 위에 동시에 있어야 한다. 두 직선은 $x - s = -x - s - 1$인 곳, 즉 $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} - s)$에서 만난다. 이 점이 C_2 위에 있으려

면 $-\frac{1}{2} - s = \frac{1}{4}$, 즉 $s = -\frac{3}{4}$이어야 하는데, 이 경우는 제외되었다. 따라서 서로 다른 네 점을 얻는다.

각 점은 C_1 위에 있다. 각 점에서 $y - x^2 = 0$이고(C_2 위에 있으므로), 소문항 (ii)의 $k = 1$일 때의 방정식이 성립한다(L_1 또는 L_2 위에 있으므로). 두 식을 빼면

$$y^2 + 2sy + s(s+1) - x = 0,$$

이고, 이것은 C_1의 방정식이다.

따라서 C_1과 C_2는 서로 다른 공통점을 적어도 네 개 가진다. 소문항 (iii)의 논증에 의해 네 개보다 많을 수는 없다. 그러므로 두 곡선은 정확히 서로 다른 네 점에서 만난다.

검산

- $y = x^2$을 C_1에 대입하면 사차방정식 $x^4 + 2sx^2 - x + s^2 + s = 0$을 얻는다. $(x^2 - x + s)(x^2 + x + s + 1)$을 전개하면 정확히 이 식이 나오므로, 두 직선이 맞음을 확인할 수 있다.
- $s = -2$일 때 네 점은 $(2,4)$, $(-1,1)$, 그리고 $\left(\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5}), \frac{1}{2}(3 \mp \sqrt{5})\right)$이다. 각 점은 $x = (y-2)^2 - 2$를 만족한다. 예를 들어 $(2,4)$: $(4-2)^2 - 2 = 2$.
- 경계인 $s = -\frac{3}{4}$에서 두 이차방정식은 $x^2 - x - \frac{3}{4} = 0$(근 $\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$)과 $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$이므로, 서로 다른 공통점은 두 개뿐이고 $x = -\frac{1}{2}$는 두 직선이 공유한다. 컴퓨터로 사차방정식의 실근 개수를 세어 보면 $s = -0.76, -1, -2$일 때 4개, $s = -0.74, -0.5$일 때 2개였다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 "이면" 방향만 증명하는 것. 두 직선이면 반드시 $p^2 - q^2 = 4r$이어야 하며, 이를 위한 논증(위의 것과 같은)이 필요하다.
- 소문항 (iv)에서 두 직선이 C_2 위의 점을 공유하지 않는지 확인하는 것을 잊거나, 찾은 점들이 실제로 C_1 위에 있음을 보이는 것을 잊는 것.

STEP 너머

$F + kG = 0$ 꼴의 곡선족을 **원뿔곡선 다발**(pencil of conics)이라 한다. 이 곡선족의 모든 곡선은 $F = 0$과 $G = 0$의 공통점을 지난다. 곡선족의 원소가 퇴화(degenerate)되도록(즉 두 직선이 되도록) k를 고르는 것은 두 원뿔곡선(conic)의 교점을 구하는 고전적인 방법이다. 사영기하학(projective geometry)에서는 3×3 행렬식(determinant)이 0이 되게 하여 이를 수행하며, 그러면 k에 대한 삼차방정식이 나온다. 여기서는 마침 s의 값에 관계없

이 $k = 1$일 때 다발이 퇴화되었다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 원뿔곡선 뒤에 숨어 있는 대칭행렬(symmetric matrix)을 다룬다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 이와 같은 취지의 문제가 더 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.