풀이

STEP III 2024, 문제 7

순수수학 • e 제곱의 무리성

> **STEP III 2024, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 1.4 절 *e*는 무리수이고, e^2도 그렇다에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch01/e-irrational.html

핵심 아이디어

두 급수(series)는 모두 지수 급수에 계승(factorial)을 곱했을 때 남는 꼬리 부분이다. $\mathrm{e} = \sum 1/r!$에 $(2n)!$을 곱하면 $r = 2n$까지의 모든 항은 정수가 되고, 그 이후의 나머지는 정확히 $\mathrm{f}(2n)$이 된다. $1/\mathrm{e}$와 $\mathrm{g}(2n)$에서도 같은 일이 일어난다. 만약 e^2이 유리수(rational)라면 이 작은 꼬리들의 어떤 결합이 반드시 정수가 되어야 하는데, 그 값은 0과 1 사이에 엄격하게 끼어 있다.

풀이

다음과 같이 놓자.

$$a_k = \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}, \qquad k \geq 1,$$

그러면 $\mathrm{f}(n) = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$이고 $\mathrm{g}(n) = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots$이다. $a_{k+1} = a_k/(n+k+1)$임에 주목한다.

소문항 (i)

모든 a_k가 양수이므로 $\mathrm{f}(n) > 0$이다. a_k의 분모에 있는 각 인수는 $n+1$ 이상이므로 $a_k \leq 1/(n+1)^k$이고, $k \geq 2$이면 $(n+2$라는 인수가 나타나므로) 엄격한 부등식(strict

inequality)이 성립한다. 공비가 $\frac{1}{n+1} < 1$인 등비급수(geometric series)와 비교하면

$$\mathrm{f}(n) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n}.$$

따라서 $0 < \mathrm{f}(n) < \frac{1}{n}$이다.

소문항 (ii)

연속한 항은 엄격하게 감소한다. $n+k+1 > 1$이므로 $a_{k+1} = a_k/(n+k+1) < a_k$이다. 처음부터 두 항씩 묶으면

$$\mathrm{g}(n) = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots > 0,$$

이다. 각 괄호가 양수이기 때문이다. 이번에는 첫째 항 다음부터 묶으면

$$\mathrm{g}(n) = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots < a_1 = \frac{1}{n+1},$$

이다. 이때도 각 괄호는 양수이다. 그러므로 $0 < \mathrm{g}(n) < \frac{1}{n+1}$이다.

소문항 (iii)

$m = 2n$이라 하자. $\mathrm{e} = \sum_{r\geq 0} 1/r!$을 이용하면

$$m!\,\mathrm{e} = \sum_{r=0}^{m} \frac{m!}{r!} + \sum_{r=m+1}^{\infty} \frac{m!}{r!}.$$

$r \leq m$이면 $m!/r! = (r+1)(r+2)\cdots m$은 정수이므로 첫째 합은 정수이다. 이것을 A라 하자. 둘째 합에서 $m!/(m+k)! = 1/\big((m+1)\cdots(m+k)\big)$이고, 이는 $\mathrm{f}(m)$의 제k항이다. 따라서 $m!\,\mathrm{e} = A + \mathrm{f}(m)$이고, $(2n)!\,\mathrm{e} - \mathrm{f}(2n) = A$는 정수이다.

마찬가지로 $1/\mathrm{e} = \sum_{r\geq 0}(-1)^r/r!$로부터

$$\frac{m!}{\mathrm{e}} = \underbrace{\sum_{r=0}^{m}(-1)^r \frac{m!}{r!}}_{B\in\mathbb{Z}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+k}}{(m+1)(m+2)\cdots(m+k)}.$$

생각해 보기 문제에서 왜 n이 아니라 $2n$을 사용할까?

$m = 2n$이 짝수이므로 $(-1)^{m+k} = (-1)^k$이고, 따라서 꼬리는 $-a_1 + a_2 - a_3 + \cdots = -\mathrm{g}(m)$이다 (여기서 a_k는 이제 m으로 만든 것이다). 그러므로 $m!/\mathrm{e} = B - \mathrm{g}(m)$이고, $\dfrac{(2n)!}{\mathrm{e}} + \mathrm{g}(2n) = B$는 정수이다. ($m$이 홀수라면 꼬리는 $+\mathrm{g}(m)$이 되어 대신 빼기 부호가 필요할 것이다.)

소문항 (iv)

소문항 (iii)의 정수 A와 B를 이용하면

$$\begin{aligned} q\,\mathrm{f}(2n) + p\,\mathrm{g}(2n) &= q\big((2n)!\,\mathrm{e} - A\big) + p\left(B - \frac{(2n)!}{\mathrm{e}}\right) \\ &= (2n)!\left(q\mathrm{e} - \frac{p}{\mathrm{e}}\right) - qA + pB \\ &= pB - qA, \end{aligned}$$

이다. $q\mathrm{e} = p/\mathrm{e}$이기 때문이다. p, q, A, B가 정수이므로 모든 양의 정수 n에 대하여 $q\,\mathrm{f}(2n) + p\,\mathrm{g}(2n)$도 정수이다.

소문항 (v)

모순을 이끌어 내기 위해(proof by contradiction) e^2이 유리수라고 가정하자. $\mathrm{e}^2 > 0$이므로 양의 정수 p, q에 대하여 $\mathrm{e}^2 = p/q$로 쓸 수 있고, 양변을 e로 나누면 $q\mathrm{e} = p/\mathrm{e}$이다. 소문항 (iv)에 의해 모든 $n \geq 1$에 대하여 $N_n = q\,\mathrm{f}(2n) + p\,\mathrm{g}(2n)$은 정수이다.

> **생각해 보기** 어떻게 하면 N_n이 정수가 될 수 없게 만들 수 있을까?

$2n$에 소문항 (i)과 (ii)를 적용하여 N_n을 양쪽에서 조인다. $p, q > 0$이므로

$$0 < N_n < \frac{q}{2n} + \frac{p}{2n+1} < \frac{p+q}{2n}.$$

이제 $2n > p + q$가 되도록 n을 충분히 크게 잡는다. 그러면 $0 < N_n < 1$이므로 N_n은 0과 1 사이에 엄격하게 놓인 정수가 되는데, 이는 불가능하다. 따라서 e^2은 무리수(irrational)이다.

검산

작은 경우는 정확히 더해 볼 수 있다. $n = 2$일 때 소문항 (iii)에 따르면 $24\mathrm{e} - \mathrm{f}(4)$는 정수이다. 실제로 $\sum_{r=0}^{4} 24/r! = 65$이고, $\mathrm{f}(4) = 24\mathrm{e} - 65 \approx 0.2388$은 $(0, \frac{1}{4})$ 안에 여유 있게 들어간다. 마찬가지로 $\mathrm{f}(2) = 2\mathrm{e} - 5 \approx 0.4366 < \frac{1}{2}$이고 $\mathrm{g}(2) = 1 - 2/\mathrm{e} \approx 0.2642 < \frac{1}{3}$이다. 컴퓨터로 확인한 결과 $n \leq 24$에 대하여 (i)과 (ii)의 범위가, $2n \leq 22$에 대하여 (iii)의 정수성이 성립하였고, 임의의 p, q에 대하여 $0 < q\,\mathrm{f}(2n) + p\,\mathrm{g}(2n) < (p+q)/(2n)$도 성립하였다.

흔한 실수

- 모든 k에 대하여 $a_k < 1/(n+1)^k$라고 주장하는 것: $k = 1$에서는 등호가 성립하므로, 엄격한 부등식은 $k \geq 2$인 항에서 나온다.

- 1/e의 전개에서 꼬리의 부호를 잊는 것: 꼬리가 $-\mathrm{g}(2n)$이 되는 것은 오직 $2n$이 짝수이기 때문이다.
- "N_n이 작다"에서 멈추는 것: 모순을 얻으려면 $N_n > 0$도 필요하며, 바로 그래서 (i)과 (ii)의 아래 범위가 중요하다.

STEP 너머

이것은 e가 무리수임을 보이는 푸리에(Fourier)의 고전적인 증명을, $\mathrm{e}^2 = p/q$를 $q\mathrm{e} = p/\mathrm{e}$로 나누어 두 급수가 모두 빠르게 수렴(converge)하도록 확장한 것이다. 같은 아이디어를 더 세심하게 다루면 0이 아닌 모든 유리수 r에 대하여 e^r이 무리수임을 보일 수 있고, 리우빌(Liouville)은 이를 이용하여 e가 정수 계수 이차방정식의 근이 될 수 없음을 보였다. 급수의 꼬리를 어림하는 것은 대학 1학년 해석학(analysis)의 핵심 기법이다. Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.