풀이

STEP III 2024, 문제 6

순수수학 • 선형 미분방정식

> **STEP III 2024, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

제어(control) u는 모든 방정식에 똑같이 더해지므로, 계수의 합이 0인 좌표의 일차결합은 u의 영향을 전혀 받지 않는다. 이 결합을 잘 고르면 그 도함수가 자기 자신의 상수배가 되므로, u가 어떻게 주어지든 이 결합은 지수적으로 증가하거나 감소한다. 지수함수는 처음에 0에서 출발하지 않는 한 결코 0이 되지 않으며, 여기서 필요조건이 나온다. 이 조건이 성립하면 운동은 하나의 일계 미분방정식(first-order differential equation)으로 축소되고, 이는 상수 u로 풀 수 있다.

풀이

소문항 (i)

(a) 두 방정식을 빼면 u 항이 소거된다.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (-x + 3y + u) - (x + y + u) = -2(x - y).$$

따라서 $w = x - y$는 $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = -2w$를 만족하고, 모든 함수 u에 대하여

$$x - y = (x_0 - y_0)\,\mathrm{e}^{-2t}$$

이다. 어떤 $t > 0$에서 입자가 원점에 있다면 그때 $x - y = 0$이다. $\mathrm{e}^{-2t} \neq 0$이므로 $x_0 - y_0 = 0$, 즉 $x_0 = y_0$이어야 한다.

(b) $x_0 = y_0$이면 (a)의 식에서 **모든** t에 대하여 $x - y = 0$이므로, 입자는 직선 $y = x$ 위에 머문다. 첫 번째 방정식에 $y = x$를 대입하면

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x + u.$$

u가 상수이면 이는 상수계수 선형 미분방정식이다. 특수해(particular solution)는 상수 $-\frac{1}{2}u$이므로

$$x = -\tfrac{1}{2}u + \left(x_0 + \tfrac{1}{2}u\right)\mathrm{e}^{2t}.$$

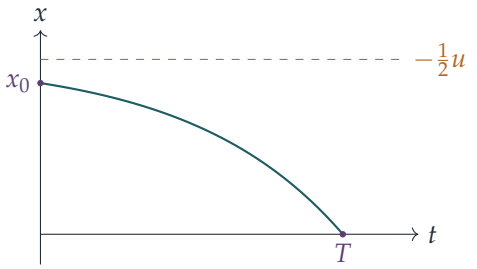
$x(T) = 0$이어야 한다(그러면 $y(T) = x(T) = 0$도 성립한다).

$$\left(x_0 + \tfrac{1}{2}u\right)\mathrm{e}^{2T} = \tfrac{1}{2}u \quad \Longrightarrow \quad x_0\,\mathrm{e}^{2T} = \tfrac{1}{2}u\left(1 - \mathrm{e}^{2T}\right).$$

$T > 0$이므로 $\mathrm{e}^{2T} \neq 1$이고, 따라서 양변을 나눌 수 있다.

$$\boxed{u = -\frac{2x_0\,\mathrm{e}^{2T}}{\mathrm{e}^{2T} - 1}}$$

부호도 타당하다. 그대로 두면 $\dot{x} = 2x$가 입자를 원점에서 멀어지게 밀어내므로, u는 x_0의 반대 방향으로 밀어야 한다. ($x_0 = 0$이면 입자는 $u = 0$일 때 이미 원점에 정지해 있다.)



그림은 $x_0 = 1$, $T = 1$인 경우이다. 입자는 불안정 평형점(unstable equilibrium) $x = -\frac{1}{2}u$의 바로 아래에서 출발하여 그로부터 밀려나고, 정확히 시각 T에 원점에 도달한다.

소문항 (ii)

(a) 소문항 (i)과 마찬가지로, $a + b + c = 0$이고(그래서 u가 소거되고) 도함수가 자기 자신의 상수배가 되는 $ax + by + cz$를 찾는다. "x, 다음에 $-2y$, 다음에 z"라는 패턴을 보면 $w = x - 2y + z$를 떠올릴 수 있다.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} &= (4y - 5z + u) - 2(x - 2z + u) + (x - 2y + u)\\ &= -x + 2y - z = -w.\end{aligned}$$

따라서 u가 무엇이든 $x - 2y + z = (x_0 - 2y_0 + z_0)\,\mathrm{e}^{-t}$이다. 원점에서는 $w = 0$이고 $\mathrm{e}^{-t} \neq 0$이므로 $x_0 - 2y_0 + z_0 = 0$이다. 즉 $y_0 = \frac{1}{2}(x_0 + z_0)$으로, y_0은 x_0과 z_0의 평균이다.

? **생각해 보기** u의 영향을 받지 않는 두 번째 결합이 또 있는가?

마지막 두 방정식에는 모두 $x+u$가 들어 있으므로, 둘을 빼면 u뿐 아니라 x도 소거된다. $v=y-z$라 하면

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (x-2z+u)-(x-2y+u) = 2(y-z) = 2v,$$

이므로 $y-z=(y_0-z_0)\,\mathrm{e}^{2t}$이다.

(b) 어떤 $t>0$에서 입자가 원점에 있다면 그때 $v=0$이다. $\mathrm{e}^{2t}\neq 0$이므로 $y_0=z_0$이다. 이를 (a)와 결합하면 $x_0=2y_0-z_0=y_0$이므로 $x_0=y_0=z_0$이다.

(c) $x_0=y_0=z_0$이면 w와 v가 모두 0에서 출발하므로 모든 t에 대하여 0으로 유지된다. 즉 $y=z$이고, 따라서 $x=2y-z=y$이다. 입자는 직선 $x=y=z$를 따라 움직이며, 각 방정식은

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 4x-5x+u = -x+u$$

가 된다(두 번째와 세 번째 방정식도 $x-2x+u$로 같다). u가 상수이면

$$x = u+(x_0-u)\,\mathrm{e}^{-t}.$$

$x(T)=0$으로 놓으면 $u\left(1-\mathrm{e}^{-T}\right) = -x_0\,\mathrm{e}^{-T}$이다. $T>0$이므로 나눌 수 있고, 분자와 분모에 e^{T}를 곱하면

$$\boxed{u = -\frac{x_0}{\mathrm{e}^{T}-1}}$$

이다. 이 경우 제어가 없는 운동 $\dot{x}=-x$는 이미 원점을 향해 감소하지만, 원점에는 $t\to\infty$일 때에만 다가간다. $T\to\infty$일 때 0으로 가는 작은 힘으로 원점 쪽으로 밀어 주면 입자는 유한한 시간 안에 원점에 도달한다.

검산

- 극한: $T\to\infty$일 때 (ii)(c)의 답은 0으로 수렴(converge)하여 자연스러운 감소와 일치한다. 한편 (i)(b)의 답은 $-2x_0$으로 수렴하는데, 이때 $x_0=-\frac{1}{2}u$가 평형점이 된다. 그러면 입자는 그 자리에 머물러 결코 원점에 도달하지 않으며, 그래서 유한한 T에 대해서는 u의 크기가 조금 더 커야 한다. $T\to 0^{+}$일 때 두 답은 모두 발산하는데, 이는 당연하다.
- 수치 검산: $x_0=1, T=1$일 때 소문항 (i)(b)에서 $u\approx -2.3130$을 얻고, 방정식을 수치적으로 진행시키면 $t=1$에서 10^{-8} 이내의 오차로 $(0,0)$에 도달한다. $u=-1/(\mathrm{e}-1)\approx -0.5820$인 (ii)(c)에서도 마찬가지이다. 또한 u가 시간에 대해 상수가 아닌 함수일 때에도 불변량(invariant) $x-y$, $x-2y+z$, $y-z$가 각각의 지수함수를 따른다는 것을 확인하였다.

흔한 실수

- (i)(a)나 (ii)(a),(b)에서 u를 상수로 가정하는 것. 이 부분들은 **임의의** u에 대한 것이며, u가 소거된다는 것이 핵심이다.
- (i)(b)와 (ii)(c)에서 모든 시간에 대하여 $y = x$(또는 $x = y = z$)인 **이유**를 밝히지 않는 것. 이는 초깃값이 0인 지수함수 공식에서 나온다.

STEP 너머

이것은 **제어 이론**(control theory)의 첫맛이다. 계를 $\dot{\mathbf{r}} = A\mathbf{r} + \mathbf{b}u$로 쓰면, 우리가 찾은 결합들은 $\mathbf{b}$와 직교하는 A의 왼쪽 고유벡터(left eigenvector)이므로 어떤 제어로도 이들에 영향을 줄 수 없다. 모든 상태를 원점으로 보낼 수 있는지는 칼만(Kalman)의 계수 조건(rank condition)으로 판정한다. 여기서는 이 조건이 성립하지 않으며, 바로 그 때문에 특별한 출발점에서만 가능한 것이다. 고유벡터에 관한 내용은 Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)에서, 상미분방정식(ODE)의 선형 연립계는 Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.