풀이

STEP III 2024, 문제 5

순수수학 • 행렬 미분방정식

STEP III 2024, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 7.7 절 **결코 변하지 않는 양**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch07/lax-pairs.html

핵심 아이디어

모든 것은 대각합(trace)에 관한 두 가지 사실에 달려 있다. 대각합은 선형(linear)이고, $\operatorname{tr}(\mathbf{XY}) = \operatorname{tr}(\mathbf{YX})$이다. 소문항 (ii)는 행렬식(determinant)의 변화율에 관한 공식, 즉 야코비(Jacobi) 공식(Jacobi's formula)이며, 이 공식은 "$\det \mathbf{M}$이 상수인가?"라는 질문을 "어떤 대각합이 0인가?"라는 질문으로 바꾸어 준다. (iii)에서 교환자(commutator) $\mathbf{MN} - \mathbf{NM}$의 대각합은 항상 0이며, 이로부터 세 가지 불변량(invariant)이 모두 얻어진다. (iv)에서는 같은 공식으로 $\operatorname{tr}\mathbf{N}$이 $\ln|\det \mathbf{M}|$의 변화 속도를 나타낸다는 것을 알 수 있으므로, 문제는 대각합은 일정하지만 행렬식은 변하는 행렬이 존재하는가로 바뀐다.

풀이

소문항 (i)

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$라 하자. $\mathbf{MN}$의 대각 성분(diagonal entries)은 $ap + br$와 $cq + ds$이고, $\mathbf{NM}$의 대각 성분은 $pa + qc$와 $rb + sd$이다. 따라서

$$\operatorname{tr}(\mathbf{MN}) = ap + br + cq + ds = \operatorname{tr}(\mathbf{NM}).$$

또한 $\mathbf{M} + \mathbf{N}$의 대각 성분은 $a + p$와 $d + s$이므로

$$\operatorname{tr}(\mathbf{M} + \mathbf{N}) = \operatorname{tr}(\mathbf{M}) + \operatorname{tr}(\mathbf{N}).$$

같은 방법으로 스칼라(scalar) k에 대하여 $\operatorname{tr}(k\mathbf{M}) = k\operatorname{tr}(\mathbf{M})$이고, $\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t$의 대각합은 $\operatorname{tr}\mathbf{M}$의 도함수(derivative)이다. 아래에서는 이 사실들을 자유롭게 사용한다.

소문항 (ii)

성분 a, b, c, d가 t에 의존할 때(프라임은 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$를 나타낸다), 곱의 미분법(product rule)에 의하여

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det\mathbf{M}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ad-bc) = a'd + ad' - b'c - bc'.$$

$\mathbf{M}$이 가역(non-singular)이므로 $\mathbf{M}^{-1} = \dfrac{1}{\det\mathbf{M}}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$이고,

$$\mathbf{M}^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\det\mathbf{M}}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \frac{1}{\det\mathbf{M}}\begin{pmatrix} da'-bc' & * \\ * & -cb'+ad' \end{pmatrix}.$$

이 행렬의 대각합은 $\dfrac{a'd + ad' - b'c - bc'}{\det\mathbf{M}}$이고, 이는 $\dfrac{1}{\det\mathbf{M}}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det\mathbf{M})$과 같다. 따라서 원하는 결과가 성립한다.

소문항 (iii)

행렬식. (ii)와 대각합의 선형성에 의하여

$$\frac{1}{\det\mathbf{M}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det\mathbf{M}) = \operatorname{tr}\big(\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{MN}-\mathbf{NM})\big) = \operatorname{tr}(\mathbf{N}) - \operatorname{tr}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{NM}).$$

두 행렬 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$과 $\mathbf{M}$에 (i)을 적용하면 $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\,\mathbf{M}) = \operatorname{tr}(\mathbf{M}\,\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}) = \operatorname{tr}(\mathbf{N})$을 얻는다. 따라서 우변은 0이다. $\det\mathbf{M} \neq 0$이므로 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det\mathbf{M}) = 0$이다.

대각합. (i)에 의하여 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{tr}(\mathbf{M}) = \operatorname{tr}\left(\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}\right) = \operatorname{tr}(\mathbf{MN}) - \operatorname{tr}(\mathbf{NM}) = 0$이다.

제곱의 대각합. 인수의 순서를 유지하기만 하면 곱의 미분법은 행렬에서도 성립한다.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{M}^2) &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}\mathbf{M} + \mathbf{M}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t} = (\mathbf{MN}-\mathbf{NM})\mathbf{M} + \mathbf{M}(\mathbf{MN}-\mathbf{NM}) \\ &= \mathbf{M}^2\mathbf{N} - \mathbf{NM}^2,\end{aligned}$$

두 개의 $\mathbf{MNM}$ 항이 소거되기 때문이다. 이는 $\mathbf{M}$ 대신 $\mathbf{M}^2$이 들어간 같은 교환자 꼴이므로, (i)에 의하여 그 대각합은 0이다. 따라서 $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^2)$도 상수이다. 세 양은 모두 t와 무관하다.

> **생각해 보기** $\mathbf{N}$도 t에 의존할 때 $\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t = \mathbf{MN} - \mathbf{NM}$을 어떻게 풀 수 있을까?

$\mathbf{N}$에서 모든 행렬과 교환되는 부분을 떼어 낸다. $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$로 두고 $\mathbf{N} = t\mathbf{I} + t\mathbf{J}$로 쓰자.

항등행렬(identity)은 $\mathbf{M}$과 교환되므로 $\mathbf{MN} - \mathbf{NM} = t(\mathbf{MJ} - \mathbf{JM})$이다. $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$이

라 하면

$$\mathbf{MJ}-\mathbf{JM}=\begin{pmatrix}0&a\\0&c\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}c&d\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-c&a-d\\0&c\end{pmatrix}.$$

성분을 비교하면 네 개의 스칼라 방정식을 얻는다.

$$a'=-tc,\qquad b'=t(a-d),\qquad c'=0,\qquad d'=tc.$$

$t=0$에서의 값 A,B,C,D를 이용하여 차례로 푼다.

- $c'=0$이므로 $c=C$이다.
- 그러면 $a'=-Ct$, $d'=Ct$이므로 $a=A-\frac{1}{2}Ct^2$, $d=D+\frac{1}{2}Ct^2$이다.
- 이제 $a-d=A-D-Ct^2$이므로 $b'=(A-D)t-Ct^3$이고, 따라서 $b=B+\frac{1}{2}(A-D)t^2-\frac{1}{4}Ct^4$이다.

그러므로

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}A-\frac{1}{2}Ct^2&B+\frac{1}{2}(A-D)t^2-\frac{1}{4}Ct^4\\C&D+\frac{1}{2}Ct^2\end{pmatrix}.$$

검산해 보면 대각합은 $A+D$이고, $ad-bc$를 전개하면 t의 모든 거듭제곱이 소거되어 $AD-BC$만 남는다. 이는 이 소문항의 앞부분 결과와 일치한다.

소문항 (iv)

이제 $\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t=\mathbf{MN}$이므로 $\mathbf{M}^{-1}\,\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t=\mathbf{N}$이고, (ii)에 의하여

$$\operatorname{tr}(\mathbf{N})=\frac{1}{\det\mathbf{M}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det\mathbf{M}).$$

따라서 모든 t에 대하여 $\operatorname{tr}\mathbf{N}=0$인 것은 $\det\mathbf{M}$이 상수인 것과 정확히 동치이다. 대각합이 일정하다는 사실은 행렬식에 대하여 아무것도 말해 주지 않으므로, 답은 **아니다**일 것이다. 이를 증명하려면 반례(counterexample) 하나가 필요하다.

> ? **생각해 보기** 문제가 $\mathbf{N}$을 미분방정식을 통해서만 주고 있을 때, 반례를 어떻게 만들 수 있을까?

거꾸로 생각한다. 대각합이 0이 아닌 상수이고 행렬식이 상수가 아닌 가역행렬 $\mathbf{M}(t)$를 아무것이나 고른 다음, $\mathbf{N}=\mathbf{M}^{-1}\,\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t$로 **정의한다**. 그러면 방정식은 저절로 성립한다. 다음과 같이 잡자.

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}1&t\\-t&1\end{pmatrix},\qquad \operatorname{tr}\mathbf{M}=2,\qquad \det\mathbf{M}=1+t^2\neq 0.$$

그러면

$$\mathbf{N}=\mathbf{M}^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix}1&-t\\t&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix}t&1\\-1&t\end{pmatrix}.$$

곱을 직접 계산하면 $\mathbf{MN} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t$임을 확인할 수 있다. 또한 $\det \mathbf{N} = 1/(1+t^2)$이므로 $\mathbf{N}$은 가역이다. 그런데

$$\operatorname{tr}(\mathbf{N}) = \frac{2t}{1+t^2},$$

이고, 이는 $t \neq 0$인 모든 t에 대하여 0이 아니다. 따라서 $\operatorname{tr}(\mathbf{N}) = 0$이 반드시 성립하는 것은 **아니다**. 반드시 성립하는 것은 $\operatorname{tr}(\mathbf{MN}) = \operatorname{tr}(\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t) = 0$이며, 이는 같은 명제가 아니다.

검산

- (iii)에서 $A = 1, B = 0, C = 2, D = 3, t = 1$로 두자. 공식에 의하면 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$이고, 이 행렬의 대각합은 4, 행렬식은 3으로 $t = 0$일 때와 같다. 이 행렬의 제곱의 대각합은 $0 - 3 - 3 + 16 = 10$이고, 처음 행렬의 경우도 $1 + 0 + 0 + 9 = 10$으로 같다.
- 임의의 A, B, C, D에 대하여 미분방정식을 컴퓨터로 수치 적분한 결과, (iii)의 $\mathbf{M}$ 공식과 소수점 아래 여덟 자리까지 일치했다. 시간에 의존하는 임의의 $\mathbf{N}$으로 같은 수치 적분을 했을 때에도 세 불변량은 일정하게 유지되었다.
- (iv)에서 $t = 1$일 때 $\mathbf{N} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$이고 그 대각합은 1이다. 한편 $\det \mathbf{M} = 1 + t^2$의 로그 미분(logarithmic derivative)은 그 점에서 $2t/(1+t^2) = 1$이므로, (ii)가 예측한 대로이다.

흔한 실수

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{M}^2) = 2\mathbf{M}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}$라고 쓰는 것. 행렬은 교환되지 않을 수 있으므로 두 순서를 모두 유지해야 한다.
- $\operatorname{tr}(\mathbf{MN}) = \operatorname{tr}\mathbf{M}\operatorname{tr}\mathbf{N}$이라고 가정하는 것. 이는 거짓이다. 성립하는 것은 선형 법칙과 순환 법칙(cyclic rule)뿐이다.
- (iv)에서 $\operatorname{tr}(\mathbf{MN}) = 0$으로부터 곧바로 $\operatorname{tr}(\mathbf{N}) = 0$을 이끌어 내는 것. "아니다"라는 답에는 명시적인 반례가 필요하다.

STEP 너머

소문항 (ii)는 $n \times n$ 행렬에 대하여 성립하는 야코비 공식의 2×2인 경우이다. 이를 $\mathbf{M}' = \mathbf{MN}$과 결합하면 $\det \mathbf{M}(t) = \det \mathbf{M}(0) \exp \int_0^t \operatorname{tr}\mathbf{N}$을 얻는다. $\mathbf{N}$이 상수이면 이는

유명한 항등식 $\det e^{\mathbf{N}} = e^{\operatorname{tr}\mathbf{N}}$이 된다. $\mathbf{M}' = \mathbf{MN} - \mathbf{NM}$ 꼴의 방정식을 락스 방정식(Lax equations)이라 한다. 양 $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^k)$는 항상 보존되며, 이 때문에 적분가능계(integrable systems) 이론에 등장한다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 대각합, 행렬식, 행렬 지수함수(matrix exponential)에 대하여 읽기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.