풀이

STEP III 2024, 문제 4

순수수학 • 포물선의 접선

> **STEP III 2024, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

모든 것은 두 직선 사이의 각에 대한 tan 공식에 달려 있으며, 이 공식은 사실 $\tan(A-B)$ 공식을 모양만 바꾼 것이다. $x=p$와 $x=q$에서의 접선(tangent)이 점 (X,Y)에서 만나고 $p+q$와 pq가 X와 Y로 표현된다는 것을 알고 나면, $(p-q)^2$과 pq를 포함하는 각에 대한 어떤 조건이든 X와 Y만으로 다시 쓸 수 있다. 그렇게 다시 쓴 조건이 바로 자취(locus)이다.

풀이

소문항 (i)

두 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 각각 α와 β라 하면 $m_1=\tan\alpha$, $m_2=\tan\beta$이다(두 직선 모두 기울기(gradient)를 가지므로 어느 것도 수직선이 아니다). 두 직선 사이의 각은 부호와 180°의 정수배를 더하는 차이를 제외하면 $\alpha-\beta$이다. 두 직선 사이의 예각(acute angle)이 45°이면 $\alpha-\beta$는 $\pm45^\circ$에 180°의 정수배를 더한 값이고, tan의 주기가 180°이므로

$$\tan(\alpha-\beta)=\tan(\pm45^\circ)=\pm1.$$

특히 $\cos(\alpha-\beta)\neq0$이므로 탄젠트의 덧셈정리(compound-angle formula)를 적용할 수 있고 $1+m_1m_2\neq0$이다.

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}.$$

따라서 요구한 대로 $\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\pm1$이다. 더 일반적으로, 두 직선 사이의 예각 θ는 $\tan\theta=\left|\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$를 만족하며, 이 사실을 소문항 (iii)에서 사용한다.

소문항 (ii)

C 위에서 $y = \dfrac{x^2}{4a}$이므로 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x}{2a}$이다. $(p, \frac{p^2}{4a})$에서의 접선은

$$y - \frac{p^2}{4a} = \frac{p}{2a}(x - p) \quad \Longleftrightarrow \quad y = \frac{p}{2a}x - \frac{p^2}{4a},$$

이고, 마찬가지로 $x = q$에서의 접선은 $y = \dfrac{q}{2a}x - \dfrac{q^2}{4a}$이다. 두 식을 빼면

$$\frac{p-q}{2a}\,x = \frac{p^2 - q^2}{4a} = \frac{(p-q)(p+q)}{4a}.$$

$p \neq q$이므로 $p - q$로 나눌 수 있고, 요구한 대로 $x = \frac{1}{2}(p+q)$를 얻는다. 이를 첫 번째 접선의 식에 대입하면

$$y = \frac{p(p+q)}{4a} - \frac{p^2}{4a} = \frac{pq}{4a}.$$

따라서 두 접선은 다음 점에서 만난다.

$$(X, Y) = \left(\tfrac{1}{2}(p+q),\ \frac{pq}{4a}\right), \qquad \text{따라서} \qquad p + q = 2X, \quad pq = 4aY. \qquad (*)$$

이제 $x = p$와 $x = q$에서의 접선이 서로 45°를 이룬다고 하자. 두 접선은 분명히 서로 다른 직선이므로 $p \neq q$이고 $(*)$가 성립한다. 두 접선의 기울기는 $m_1 = \frac{p}{2a}, m_2 = \frac{q}{2a}$이므로

$$\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{(p-q)/(2a)}{1 + pq/(4a^2)} = \frac{2a(p-q)}{4a^2 + pq}.$$

소문항 (i)에 의해 이 값은 ± 1이고, 제곱하면 부호가 없어진다.

$$4a^2(p-q)^2 = (4a^2 + pq)^2.$$

> ? **생각해 보기** 조건에 $p + q$가 아니라 $p - q$가 들어 있을 때, 어떻게 p와 q를 없앨 수 있을까?

대칭식(symmetric expression)인 $(p-q)^2 = (p+q)^2 - 4pq$를 이용하면 $(*)$를 적용할 수 있다.

$$(p-q)^2 = 4X^2 - 16aY, \qquad 4a^2 + pq = 4a^2 + 4aY = 4a(a + Y).$$

조건은 다음과 같이 된다.

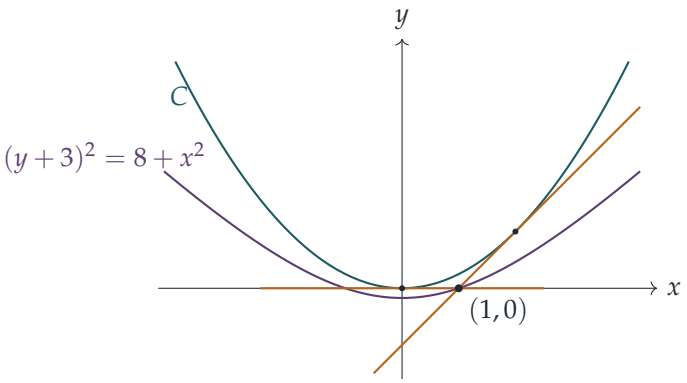
$$4a^2\,(4X^2 - 16aY) = 16a^2(a + Y)^2.$$

$16a^2$으로 나누면($a \neq 0$이므로 가능하다)

$$X^2 - 4aY = Y^2 + 2aY + a^2,$$

$$\text{따라서} \qquad X^2 + 8a^2 = Y^2 + 6aY + 9a^2 = (Y + 3a)^2.$$

따라서 요구한 대로 교점은 $(y + 3a)^2 = 8a^2 + x^2$ 위에 있다.



$a = 1$일 때: $x = 2$에서의 접선(기울기 1)과 $x = 0$에서의 접선(기울기 0)은 45°를 이루고, 두 접선은 $(1, 0)$에서 만나며, 이 점은 쌍곡선(hyperbola)의 위쪽 가지 위에 있다.

소문항 (iii)

(X, Y)를 $(y + 7a)^2 = 48a^2 + 3x^2$ 위의 점으로서, C의 두 접선, 즉 $p \neq q$인 $x = p$와 $x = q$에서의 접선이 만나는 점이라 하자. 그러면 $(*)$가 성립한다. 소문항 (i) 끝의 설명에 의해 두 접선 사이의 예각 θ는 다음을 만족한다.

$$\tan^2\theta = \left(\frac{2a(p-q)}{4a^2+pq}\right)^2 = \frac{4a^2(4X^2-16aY)}{16a^2(a+Y)^2} = \frac{X^2-4aY}{(Y+a)^2},$$

여기서 소문항 (ii)와 같은 대입을 사용했다. ($Y = -a$이면 두 접선은 수직이 되는데, 아래에서 이 곡선 위에서는 그런 일이 일어날 수 없음을 보인다.)

> ? **생각해 보기** 곡선의 방정식이 $X^2 - 4aY$를 다루는 데 어떻게 도움이 될까?

곡선의 방정식을 전개하면 $Y^2 + 14aY + 49a^2 = 48a^2 + 3X^2$, 즉

$$3X^2 = Y^2 + 14aY + a^2.$$

그러면

$$3(X^2 - 4aY) = Y^2 + 14aY + a^2 - 12aY = Y^2 + 2aY + a^2 = (Y + a)^2.$$

여기서 두 가지 결과가 나온다. 첫째, $Y \neq -a$이다. 그렇지 않으면 $X^2 - 4aY = 0$, 즉 $X^2 = -4a^2$인데, $a \neq 0$이므로 이는 불가능하다. 따라서 $X^2 - 4aY = \frac{1}{3}(Y + a)^2 > 0$이고, 이는 그 점이 C의 바깥에 있음도 확인해 준다. p와 q를 근으로 갖는 이차방정식 $t^2 - 2Xt + 4aY = 0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로, 곡선 위의 모든 점을 지나는 접선이 실제로 두 개 있다. 둘째,

$$\tan^2\theta = \frac{\frac{1}{3}(Y+a)^2}{(Y+a)^2} = \frac{1}{3}.$$

따라서 점이 곡선 위의 어디에 있든 $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$이다. 즉 두 접선 사이의 예각은 일정하며, 그 크기는 $30°$이다.

검산

- $a = 1$일 때, $x = 2$와 $x = 0$에서의 접선은 $y = x - 1$과 $y = 0$이고, $45°$를 이룬다. 두 접선은 $(1, 0)$에서 만나며, $(0+3)^2 = 9 = 8 + 1^2$이다.
- 소문항 (iii)에서 $a = 1$, $X = 0$으로 잡으면 $(Y+7)^2 = 48$이므로 $Y = 4\sqrt{3} - 7 \approx -0.072$이다. $(0, Y)$를 지나는 접선은 $x = \pm\sqrt{-4Y} \approx \pm 0.536$에서 접하고, 기울기는 ± 0.268이다. $\tan 15° \approx 0.268$이므로 각 접선은 수평선과 $15°$를 이루고, 두 접선은 $30°$만큼 벌어져 있다.
- 천 개의 무작위 a 값과 각 쌍곡선의 두 가지 위의 점들에 대해 컴퓨터로 확인한 결과 $45°$와 $30°$라는 결과가 확인되었다.

흔한 실수

- p와 q를 각각 따로 구하려고 하는 것. 필요한 것은 대칭적인 조합 $p+q$와 pq뿐이며, $(p-q)^2 = (p+q)^2 - 4pq$를 이용하면 된다.
- 소문항 (i)에서 $\pm$를 빠뜨리는 것. 조건을 제곱하면 $45°$ 각의 두 방향이 모두 유지되고, 바로 그 덕분에 하나의 방정식을 얻는다.
- 소문항 (iii)에서 약분하기 전에 $Y + a \neq 0$인지 확인하지 않는 것.

STEP 너머

점 (X, Y)에서 포물선(parabola)에 그은 접선은 이차방정식 $t^2 - 2Xt + 4aY = 0$에 의해 결정되며, 접선들이 일정한 각으로 만나는 점들의 자취는 항상 쌍곡선이다($90°$일 때는 준선(directrix) $y = -a$로 퇴화한다). 이러한 아이디어는 사영기하학(projective geometry)에 속하며, 사영기하학에서는 극–극선 관계(pole–polar relation)가 한 점을 그 점의 접점현(chord of contact)과 연결한다. 이런 성격의 문제를 공략 방법에 대한 해설과 함께 더 보고 싶다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.